四川1977年高考数学试题解

一、

(1)解方程：$9(3x+2)^2-4=0$　　　　(8分)

解法一、把方程左边因式分解

$$[3(3x+2)+2][3(3x+2)-2]=0$$

$$(9x+8)(9x+4)=0$$

因此　　$x_1=-\frac{8}{9}$，　　$x_2=-\frac{4}{9}$

解法二．原方程可写成　　$(3x+2)^2=\frac{4}{9}$

两边开平方　　$3x+2=\pm\frac{2}{3}$

$\therefore$　　$x_1=\frac{\frac{2}{3}-2}{3}=-\frac{4}{9}$，　　$x_2=\frac{-\frac{2}{3}-2}{3}=-\frac{8}{9}$

(2)已知$Lg5=0.6990$，问$8^{34}\times25^{11}$是多少位的整数？（8分）

解：因为

$$Lg(8^{34}\times25^{11})=34Lg8+11Lg25=34Lg\left(\frac{10}{5}\right)^3+11Lg5^2$$
$$=34\times3(Lg10-Lg5)+11\times2Lg5$$
$$=102(1-Lg5)+22Lg5=102-80Lg5$$
$$=102-80\times0.6990=46.0800$$

所以$8^{34}\times25^{11}$是47位数．

答：$8^{34}\times25^{11}$是47位的整数．

(3)把$\sin(30^\circ+x)+\cos(x+60^\circ)-\sin^2x-\cos^2x$化成积的形式．（8分）

解：　$\sin(30^\circ+x)+\cos(x+60^\circ)-\sin^2x-\cos^2x$

$$=\sin(30^\circ+x)+\sin[90^\circ-(x+60^\circ)]-(\sin^2x+\cos^2x)$$
$$=\sin(30^\circ+x)+\sin(30^\circ-x)-1$$
$$=2\sin\frac{(30^\circ+x)+(30^\circ-x)}{2}\cos\frac{(30^\circ+x)-(30^\circ-x)}{2}-1$$
$$=2\sin30^\circ\cos x-1=\cos x-1=-(1-\cos x)$$
$$=-2\sin^2\frac{x}{2}$$

(4)试证明：

$$[(2m)^0-(m+x)^{-2}]\div[(2x)^0-(m+x)^{-1}]^2\cdot\left[2m^0-\frac{1-(m-x)^2}{2mx}\right]$$
$$=\frac{(m+x+1)^2}{2mx}\text{（8分）}$$

证明：$[(2m)^0-(m+x)^{-2}]\div[(2x)^0-(m+x)^{-1}]^2\cdot\left[2m^0-\frac{1-(m-x)^2}{2mx}\right]$

$$=\left[1-\frac{1}{(m+x)^2}\right]\div\left[1-\frac{1}{m+x}\right]^2\cdot\left[2-\frac{1-(m-x)^2}{2mx}\right]$$
$$=\frac{(m+x)^2-1}{(m+x)^2}\div\left(\frac{m+x-1}{m+x}\right)^2\cdot\frac{4mx-1+(m^2-2mx+x^2)}{2mx}$$

$$=\frac{(m+x-1)(m+x+1)}{(m+x)^2}\cdot\frac{(m+x)^2}{(m+x-1)^2}\cdot\frac{m^2+x^2+2mx-1}{2mx}$$

$$=\frac{m+x+1}{m+x-1}\cdot\frac{(m+x)^2-1}{mx}$$

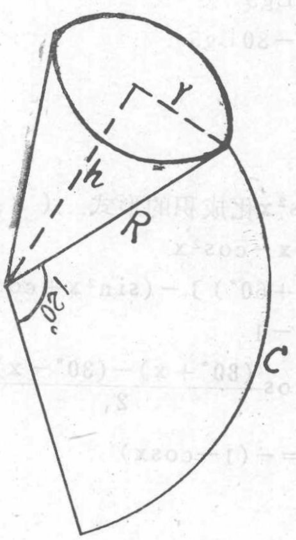
$$=\frac{m+x+1}{m+x-1}\cdot\frac{(m+x-1)(m+x+1)}{2mx}$$

$$=\frac{(m+x+1)^2}{2mx}$$

二、将半径为R，中心角为120°的扇形铁片，卷成一圆锥容器，问圆锥容器的容积是多少？（接缝及卷边不计）（10分）

解

因为圆锥容积$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$，所以只要求出底面半径r和圆锥的高h就行了



据图可得扇形的弧长

$$C=\frac{120\pi R}{180}=\frac{2\pi}{3}R$$

$$2\pi r=\frac{2}{3}\pi R$$

$$\therefore r=\frac{2}{3}\pi R\times\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{3}R$$

据勾股定理

$$h=\sqrt{R^2-(\frac{R}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$$

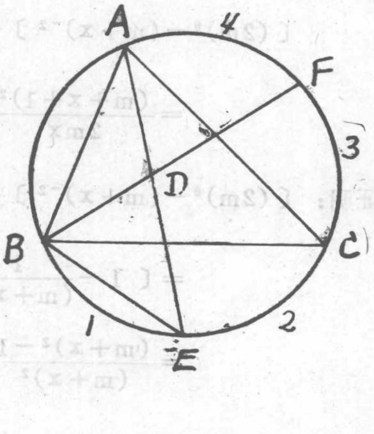
$$\therefore 圆锥容积V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}R$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{81}\pi R^3$$

答：园锥的容积为$\frac{2\sqrt{2}}{81}\pi R^3$.

三、如图，AD、BD分别为△ABC的角平分线，延长AD交△ABC的外接园于E，连接BE，求证：BE＝DE

证明：延长BD交圆于F



∠BDE的度数$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{B1E}+\overset{\frown}{A4F})$的度数，

∠DBE的度数$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ECF})$的度数

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{E2C}+\overset{\frown}{C3F})$的度数

而据已知得：$\overset{\frown}{B1E}=\overset{\frown}{E2C}$，$\overset{\frown}{A4F}=\overset{\frown}{C3F}$

∴$\angle BDE=\angle DBE$　　故　　$BE=DE$.

四、顺次连接$A(-2,\ 4)$，$B(2,\ 2)$，$C(4,\ 0)$得$\triangle ABC$，写出BC边上的高所在的直线方程，并计算$\triangle ABC$的面积.（16分）

解：直线BC的方程为：

$$\frac{y-}{x-2}=\frac{0-2}{4-2}\qquad \text{即}\qquad y+x-4=0，\text{斜率为}-1.$$

BC边上的高过$A(-2,\ 4)$点，斜率应为1，因此BC上高所在直线方程为$y-4=x+2$，即$y=x+6$. BC边上的高h，等于A点到直线BC的距离。

因此 $h=\dfrac{|4+(-2)-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

而　$|BC|=\sqrt{(2-4)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$

所以 $\triangle ABC$的面积$=\frac{1}{2}h\cdot|BC|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=2$

答：BC边上的高所在的直线方程为$y=x+6$；$\triangle ABC$的面积为2（面积单位）

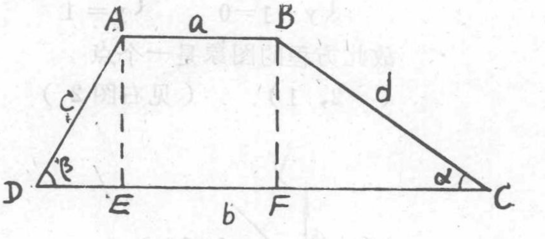
（注）$\triangle ABC$的面积也可用下法直接求出：

$$\triangle ABC\text{的面积}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & 4 & 1\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}=\frac{1}{2}|0+8+8-0-16+4|=2.$$

五、如图，在梯形ABCD中，

$a:b:c:d=1:3:1:2$.

求在梯形ABCD中，$\cos\alpha$，$\sin\alpha$和$\sin\beta$的值.　（16分）



解：自A向DC作垂线AE，交DC于E；自B向DC作垂线BF，交DC于F. 设$DE=x$，

则$FC=b-a-x$

依题意可知：　$c=a$，$b=3a$，$d=2a$.

由勾股定理得　　$AE^2=a^2-x^2$，$BF^2=(2a)^2-(3a-a-x)^2$

而已知$AE=BF$，所以　$a^2-x^2=(2a)^2-(3a-a-x)^2$

整理后得　$4ax=a^2$

所以　　$x=DE=\frac{1}{4}a$，　$FC=3a-a-x=2a-x=\frac{7}{4}a$

因此　　$\cos\alpha=\dfrac{FC}{BC}=\dfrac{\frac{7}{4}a}{d}=\dfrac{\frac{7}{4}a}{2a}=\dfrac{7}{8}$

$$\sin\alpha=\frac{BF}{BC}=\frac{\sqrt{(2a)^2-(\frac{7}{4}a)^2}}{2a}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}a}{2a}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\sin\beta=\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{c}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}a}{a}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

六、分别在三个平面直角坐标上作出下列方程的图形.

1．$(x+2)(y-1)=0$；

2．$(x+2)^2+(y-1)^2=0$；

3．$(x+2)^2-(y-1)^2=0$．

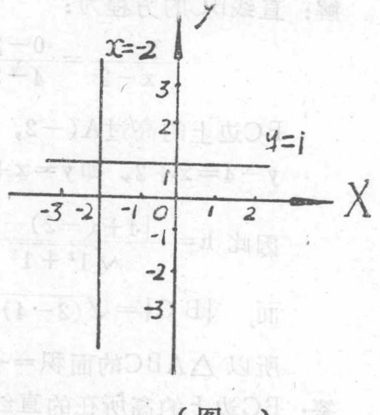
解：1．$(x+2)(y-1)=0$

两个因式相乘等于零，必定有一个因式是零。

因此　　$x+2=0$　或　$y-1=0$

故此方程的图象为两条直线：

$x=-2$，$y=1$　（见右图1）



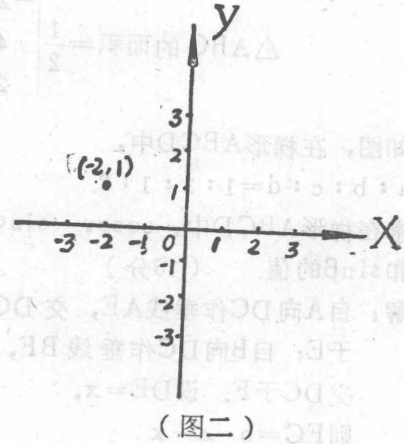
（图一）

2．$(x+2)^2+(y-1)^2=0$

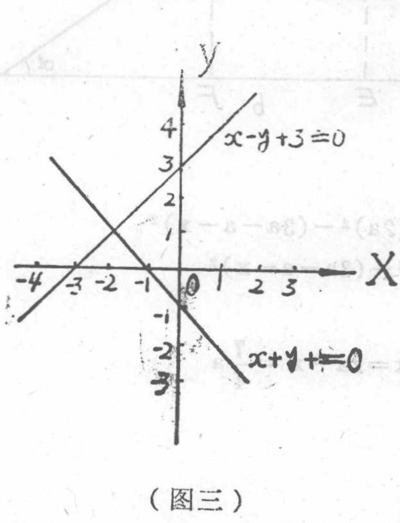
因为平方数$(x+2)^2$和$(y-1)^2$不可能小于零，要使它们的和为零，必须同时

$$\begin{cases}x+2=0\\y-1=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$$

故此方程的图象是一个点$(-2, 1)$．（见右图2）



（图二）



（图三）

3．$(x+2)^2-(y-1)^2=0$

分解因式

$(x+2-y+1)(x+2+y-1)=0$

$(x-y+3)(x+y+1)=0$

则　$x-y+3=0$　或者　$x+y+1=0$

故此方程的图象是两条直线：

$x-y+3=0$　和　$x+y+1=0$

（见左图3）

参考题．该题供超过高中水平的高中生做，考生在答完正题后，若有余力应做此题，在总分之外加分，如作正确解答，正题和参考题总分为120分。

一、1．求函数$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2+3$的极值．（4分）

解：先找出可能是极值点的那些x的值，即求$f'(x)=0$的根

$$f'(x)=x^3-3x^2-4x=0$$

$$x(x-4)(x+1)=0$$

其根分别是0，4，－1．因此在$x=0$，$x=4$，$x=-1$处$f(x)$可能有极值．

又因为

$f''(0)=(3x^2-6x-4)|_{x=0}=-4<0$，$\therefore x=0$时，有极大值$f(0)=3$

$f''(4)=(3x^2-6x-4)|_{x=4}=20>0$，$\therefore x=4$时，有极小值$f(4)=-29$

$f''(-1)=(3x^2-6x-4)|_{x=-1}=5>0$，$\therefore x=-1$时，有极小值$f(-1)=2\frac{1}{4}$

答：当$x=0$时$f(x)$有极大值3；$x=4$时$f(x)$有极小值-29；$x=-1$时$f(x)$有极小值$2\frac{1}{4}$．

2．计算$\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$　　（4分）

解：$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c_1$

在$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$中，令$x=2\sin t$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{4\sin^2 t}{2\cos t}\cdot 2\cos t dt=\int 4\sin^2 t dt$$

$$=\int 2(1+\cos 2t)dt=\int 2dt-\int 2\cos 2t dt$$

$$=2t-\sin 2t+c_2$$

代回原变量　$t=\arcsin\frac{x}{2}$，得

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=2\arcsin\frac{x}{2}-\sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)+c_2$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+c_2$$

所以

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=\arcsin x+c_1-\left(2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+c_2\right)$$

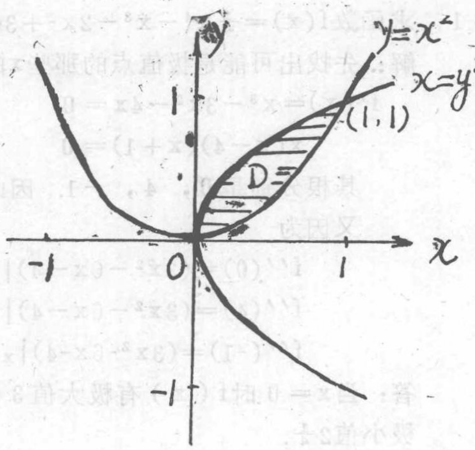
$$=\arcsin x-2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+c$$

（其中$c=c_1-c_2$，是任意常数）.

3．计算$\iint\limits_{(D)}(1+y^2)dxdy$，

(D)是$y=x^2$，$x=y^2$所围成的区域

（4分）



解：区域（D）如右图所示.

因此

$$\iint\limits_{(D)}(1+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(1+y^2)dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left[\left(y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{x^6}{3}-x^2+\frac{x\sqrt{x}}{3}+\sqrt{x}\right)dx$$

$$=\left(-\frac{x^7}{21}-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2\sqrt{x}}{15}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{44}{105}$$

二、求下列方程的通解：

1．$xdy-2ydx=3x^2dx$

解法1：原方程两边同除以x^3，得

$$\frac{1}{x^2}dy-\frac{2y}{x^3}dx=\frac{3}{x}dx$$

方程的左端$\frac{1}{x^2}dy-\frac{2y}{x^3}dx=d\left(\frac{y}{x^2}\right)$，而右端$\frac{3}{x}dx=d(3\text{Ln}|x|)$

因此方程又可化为：　　$d\left(\frac{y}{x'}\right)=d(3\text{Ln}|x|)$

$\therefore\frac{y}{x^2}=3\text{Ln}|x|+c$　　或者　　$y=3x^2\text{Ln}|x|+cx^2$

其中c为任意常数

解法2：原方程可写成$\frac{dy}{dx}=\frac{2y+3x^2}{x}$

令$\frac{y}{x^2}=t$，即$y=tx^2$，　　则$\frac{dy}{dx}=2xt+x^2\frac{dt}{dx}$

代入原方程，得　　$2xt+x^2\frac{dt}{dx}=\frac{2x^2t+3x^2}{x}$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{3}{x}$$

$\therefore t=3\mathrm{Ln}|x|+c$

代回原变量$t=\frac{y}{x^2}$，得

$$\frac{y}{x^2}=3\mathrm{Ln}|x|+c, \qquad 或 \qquad y=3x^2\mathrm{Ln}|x|+cx^2$$

其中c为任意常数。

2．$y''-2y'+y=\cos x$

解：这是一个常系数线性微分方程，它相应的齐次方程$y''-2y'+y=0$的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$

特征根为$\lambda_1=\lambda_2=1$．因此相应的齐次方程的通解为

$$y=c_1e^x+c_2xe^x \quad （c_1、c_2是任意常数）$$

现在再求原非齐次方程的特解。设此特解有如下形式：

$$y=A\cos x+B\sin x \qquad （其中A、B为待定常数）$$

把它代入原方程，并化简后得

$$-2B\cos x+2A\sin x=\cos x$$

于是 $A=0$，$B=-\frac{1}{2}$这样我们得到了原非齐次方程的一个特解

$y=-\frac{1}{2}\sin x$，再加上相应齐次方程的通解，就得到原方程的通解：

$$y=c_1e^x+c_2xe^x-\frac{1}{2}\sin x. \qquad （c_1，c_2为任意常数）.$$