宁夏1977年高考数学试题解

一、解下列各题：（文科每小题6分，理科每小题5分）

1．计算$(2\frac{7}{9})^{\frac{1}{2}}+3^{-2}-(\frac{1}{3})^{0}$

解：$(2\frac{7}{9})^{\frac{1}{2}}+3^{-2}-(\frac{1}{3})^{0}=(\frac{25}{9})^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3^2}-1=\frac{5}{3}+\frac{1}{9}-1=\frac{7}{9}$

2．化简：$\sqrt{12}-\sqrt{48}-3\sqrt{3}$

解：$\sqrt{12}-\sqrt{48}-3\sqrt{3}=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}-3\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$.

3．分解因式：$mx^2+2mxy+my^2$

解：$mx^2+2mxy+my^2=m(x^2+2xy+y^2)=m(x+y)^2$

4．解方程：$2x^2-3x+1=0$

解：$(x-1)(2x-1)=0$

$\therefore x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2}$

5．已知$\mathrm{Sin}\alpha=\frac{3}{5}$（α是锐角）求(1)$\mathrm{Cos}\alpha$；(2)$\mathrm{tg}\alpha$

解：(1) 由$\mathrm{Sin}\alpha=\frac{3}{5}$，$\therefore \mathrm{Cos}\alpha=\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$

(2)由$\mathrm{Sin}\alpha=\frac{3}{5}$，$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{4}{5}$，$\therefore \mathrm{tg}\alpha=\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha}=\frac{3}{4}$

6．不查表求：$\mathrm{Lg}8+\mathrm{Lg}125-\mathrm{Lg}1$

解：$\mathrm{Lg}8+\mathrm{Lg}125-\mathrm{Lg}1=3\mathrm{Lg}2+3\mathrm{Lg}5-0=3(\mathrm{Lg}2+\mathrm{Lg}5)=3\mathrm{L}10=3$

7．求经过点（4，−4）和原点的直线方程

解：∵直线过点（4，−4）和原点，∴直线的斜率$k=\frac{-4}{4}=-1$

由斜截式得到所求的直线方程为$y=-x$

8．解不等式：$(x+1)(x-2)<0$

解：由不等式$(x+1)(x-2)<0$得两个不等式组：

（Ⅰ）$\begin{cases}x+1>0\\x-2<0\end{cases}$；（Ⅱ）$\begin{cases}x+1<0\\x-2>0\end{cases}$

解不等式组（Ⅰ）得$-1<x<2$；不等式组（Ⅱ）无解。因此，原不等式的解是

$$-1<x<2$$

9．求$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}$

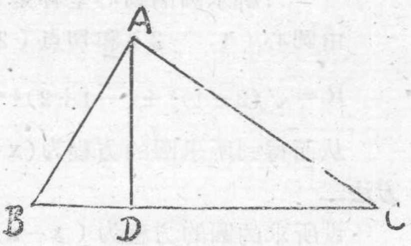
解：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4+\cdots+(\frac{1}{2})^{10}$

$$=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^{10}]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{10}})}{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{10}}=\frac{2^{10}-1}{2^{10}}=\frac{1023}{1024}$$

10. 已知：在△ABC中，$\angle B=60°$，

$AD\perp BC$，$AD=3$，$AC=5$

求：BC，AB



解：在△ABD中，$BD=\dfrac{AD}{tg60°}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$\therefore\quad AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$

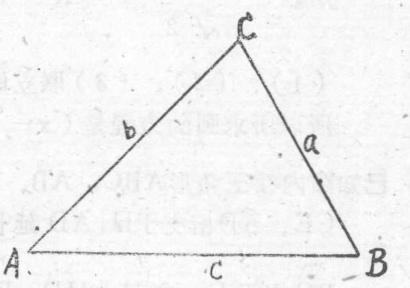
在△ACD中，$DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{25-9}=4$，$\therefore BC=BD+DC=\sqrt{3}+4$

二、下列两题只选作一题(文科14分，理科12分)

1．在△ABC中，已知：$a=\sqrt{2}$，$A=45°$，

$B=60°$

求C、b、c及面积△



解：在△ABC中，$\because A=45°, B=60°$，

$\therefore C=180°-(A+B)=75°$

由正弦定理得

$$b=\frac{aSinB}{SinA}=\frac{\sqrt{2}\,Sin60°}{Sin45°}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3},\qquad C=\frac{aSinC}{SinA}=\frac{\sqrt{2}\,Sin75°}{Sin45°}=\frac{\sqrt{2}\,Sin75°}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=2\,Sin75°=2Sin(30°+45°)=2(Sin30°Cos45°+Cos30°Sin45°)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

三角形的面积

$$S=\frac{1}{2}abSinC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{12}+6}{8}=\frac{\sqrt{3}+3}{4}$$

2．求与直线$x+y=1$相切于点(2，−1)，并且圆心在直线$y=-2x$上圆的方程

解法一

先求出过切点(2，−1)圆的直径所在的直线方程。因为$x+y=1$的斜率为−1，所以过切点(2，−1)圆直径所在直线的斜率应为1，由点斜式得到这条直径所在直线方程：$y+1=x-2$

又知圆心也在直线$y=-2x$上，因此圆心坐标(x，y)必须同时满足

$$\begin{cases}y+1=x-2\\y=-2x\end{cases}\qquad 解这个方程组得\quad\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$$

∴所求圆的圆心坐标是（1，－2）

由圆心（1，－2）和切点（2，－1），得圆的半径．

$R=\sqrt{(2-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}$

从而得到所求圆的方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=2$

方法二

设所求的圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 其圆心是(a,b)，半径是R

因为点$(2,-1)$在圆上，所以$(2-a)^2+(-1-b)^2=R^2$…（1）

因为圆心在直线$y=-2x$上，所以$b=-2a$……（2）

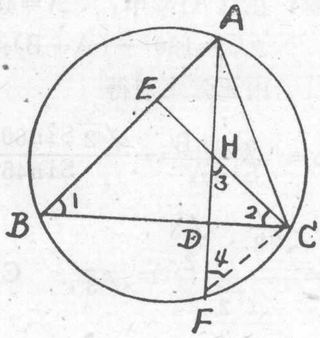
又因为直线$x+y=1$和圆相切，圆心(a,b)到直线$x+y+1=1$的距离等于R

所以 $\dfrac{|a+b-1|}{\sqrt{2}}=R$……（3）

（1）、（2）、（3）联立解之，得$a=1$，$b=-2$，$R=\sqrt{2}$

所以所求圆的方程是$(x-1)^2+(y+2)^2=2$

三、已知圆内接三角形ABC，AB、BC上的高CE、AD相交于H，AD延长线与$\overset{\frown}{BC}$交于F。求证：HD＝FD（文科13分，理科12分）



证明：连接FC∵∠1＋∠2＝90°，

∠3＋∠2＝90°∴∠1＝∠3……（1）

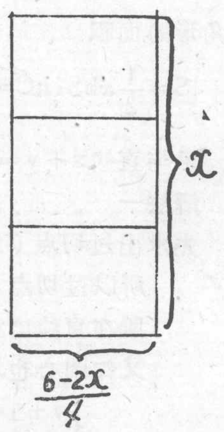
又∵A、B、F、C四点共园

∴∠1＝∠4……（2）

由(1)、(2)得∠3＝∠4，而又DC＝DC（共公边） ∴Rt△HDC≅Rr△FDC

∴HD＝FD

四、用6米长的条形木料做如图的矩形窗框（包括中间的两个横档）问窗框的长、宽尺寸如何选择，窗框的面积最大？（文科13分，理科12分）



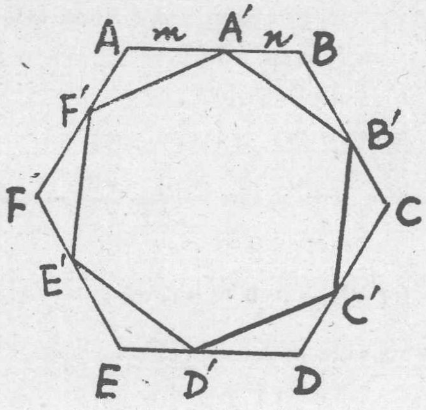
解：设窗框的长为x米，宽为$\dfrac{6-2x}{4}=\dfrac{3-x}{2}$米，

那末窗框的面积$S=x\left(\dfrac{3-x}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2}{3}x$

$=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{8}$ 当$x=\dfrac{3}{2}$（米）时，

S有极大值，这时宽$\dfrac{3-x}{2}=\dfrac{3}{4}$（米）

答：窗框的长为$\frac{3}{2}$米，宽为$\frac{3}{4}$米时，窗框的面积最大



五、一大正六边形内接一个小正六边形，小正六边形各顶点分大正六边形各边成m、n两段

(1)求小正六边形的面积$S_小$；

(2)证明$4S_小 \geqslant 3S_大$

($S_大$表示大正六边形的面积)

(本题文科不作，理科14分)

解：(1)由图可知$A'B=n$，$BB'=m$，而正六边形的一个内角$\angle B=120°$.因此求得

$$\overline{A'B'}^2=m^2+n^2-2mn\mathrm{Cos}120°=m^2+n^2+mn$$

从而求得$S_小=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{A'B'}^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}(m^2+n^2+mn)$

(2)求证：$4S_小 \geqslant 3S_大$.　证明：$3S_大=3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\overline{AB}^2=\frac{9\sqrt{3}}{2}(m+n)^2$

$$而4S_小=4\times\frac{3\sqrt{3}}{2}(m^2+n^2+mn)=6\sqrt{3}\left[(m+n)^2-mn\right]$$

$$\leqslant 6\sqrt{3}\left[(m+n)^2-\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\right]=6\sqrt{3}\left[\frac{3(m+n)^2}{4}\right]$$

$$=\frac{9}{2}\sqrt{3}(m+n)^2=3S_大$$　即证明　$4S_小 \geqslant 3S_大$

附加题：(满分20分，在100分之外，计入总分)

1．已知　$\mathrm{Cos}\alpha+\mathrm{Sin}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

试求：(1)$\mathrm{Sin}^4\alpha+\mathrm{Cos}^4\alpha$；　(2)$\mathrm{Sin}^5\alpha+\mathrm{Cos}^5\alpha$

解：在已知的等式　$\mathrm{Cos}\alpha+\mathrm{Sin}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$　(1)的两边平方，得

$$1+2\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha=\frac{1}{2}\quad 即\quad \mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Co}\alpha=-\frac{1}{4}\qquad(2)$$

(1)$\mathrm{Sin}^4\alpha+\mathrm{Cos}^4\alpha=(\mathrm{Sin}^2\alpha+\mathrm{Cos}^2\alpha)^2-2\mathrm{Sin}^2\alpha\mathrm{Cos}^2\alpha=1-2(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha)^2$

用(2)式代入，得$\mathrm{Sin}^4\alpha+\mathrm{Cos}^4\alpha=1-2\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$　(3)

(2)$\mathrm{Sin}^5\alpha+\mathrm{Cos}^5\alpha$

$=(\mathrm{Sin}^4\alpha+\mathrm{Cos}^4\alpha)(\mathrm{Sin}\alpha+\mathrm{Cos}\alpha)-\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha(\mathrm{Sin}^3\alpha+\mathrm{Co}^3\alpha)$

$=(\mathrm{Sin}^4\alpha+\mathrm{Cos}^4\alpha)(\mathrm{Sin}\alpha+\mathrm{Cos}\alpha)-\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha[(\mathrm{Sin}\alpha$

$+\text{Cos}\alpha)^3-3\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha(\text{Sin}\alpha+\text{Cos}\alpha)]$

$=(\text{Sin}^4\alpha+\text{Cos}^4\alpha)(\text{Sin}\alpha+\text{Cos}\alpha)-\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha(\text{Sin}\alpha+\text{Cos}\alpha)^3$

$+3\text{Sin}^2\alpha\text{Cos}^2\alpha(\text{Sin}\alpha+\text{Cos}\alpha)$

$=(\text{Sin}\alpha+\text{Cos}\alpha)[(\text{Sin}^4\alpha+\text{Cos}^4\alpha)-\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha(\text{Sin}\alpha+\text{Cos}\alpha)^2$

$+3\text{Sin}^2\alpha\text{Cos}^2\alpha]$

用(1)、(2)，(3)代人，得

$$\text{Sin}^5\alpha+\text{Cos}^5\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{7}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right]=\frac{19\sqrt{2}}{32}$$

2．(1)若$a_i>0$)$i=1, 2, \cdots\cdots, n$)，证明：$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant n^2$；

〔证〕根据n个正数的算术平均数不小于其几何平均数，这个基本不等式，我们得到下面两个不等式：

$$\sum_{i=1}^{a}a_i\geqslant n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i},\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}a_i}}$$

因此
$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant\left(n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\right)\left(n\sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}a_i}}\right)=n^2\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n}a_i}{\prod_{i=1}^{n}a_i}}=n^2$$

($\prod_{i=1}^{n}a_i$表示$a_1\cdot a_2\cdots\cdots a_n$)

(2)若$f(x)$在〔0，1〕上连续，且$f(x)>0$，证明$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\geqslant1$.

〔证〕在〔0，1〕区间内，等距离地插进$n-1$个点，并令$x_0=0$，$x_n=1$,有

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\quad x_2=\frac{2}{n},\ \cdots,\quad x_{n-1}=\frac{n-1}{n},\ x_n=1$$

$$\triangle x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{1}{n}\qquad(i=1, 2\cdots, n)$$

根据定积分的定义知

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

$$\int_0^1\frac{dx}{f(x)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(x_i)}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(x_i)}$$

而由$f(x_i)>0$ ($i=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$)成立下面不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)},\qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(x_i)}\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)}}$$

因此 $$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(x_i)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(x_i)}\right) \right]$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(x_i)} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{i=i}^{n} f(x_i)}} \right] = 1$$