安徽1977年高考数学试题解

（理　工　科）

1．（本题满分21分，每小题3分）

（1）计算：$0.25\times(-2)^2-4\div(\sqrt{5}-1)^0-(\frac{1}{6})^{-\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$．

解：原式$=\frac{1}{4}\times4-4\div1-\sqrt{6}+\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1-4-\sqrt{6}+3+\sqrt{6}=0$

（2）求函数$y=\mathrm{Log}_x(4^x-16)$的定义域

解：底数$x>0$，且$x\neq1$；真数$4^x-16>0$．解不等式组：

$$\begin{cases}x>0，且x\neq1\\4^x-16>0\end{cases}\qquad\begin{cases}x>0\ 且x\neq1\\x>2\end{cases}$$

$\therefore x>2$

所以函数$y=\mathrm{Log}_x(4^x-16)$的定义域为$x>2$

(3)求$\mathrm{Sin}(-915°)$的值

解：$\mathrm{Sin}(-915°)=-\mathrm{Sin}915°=-\mathrm{Sin}(360°\times2+195°)=-\mathrm{Sin}195°$

$=-\mathrm{Sin}(180°+15°)=\mathrm{Sin}15°=\mathrm{Sin}(45°-30°)$

$=\mathrm{Sin}45°\mathrm{Cos}30°-\mathrm{Cos}45°\mathrm{Sin}30°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(4)求函数$y=\mathrm{arcSin}(1-2x)$的定义域

解：要使函数$y=\mathrm{arcSin}(1-2x)$有意义，必须

$-1\leqslant1-2x\leqslant1 \qquad 0\leqslant x\leqslant1$

所以函数$y=\mathrm{arcSin}(1-2x)$的定义域为$0\leqslant x\leqslant1$

(5)化复数$-1+i$为三角函数式

解：$-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\mathrm{Cos}\frac{3\pi}{4}+i\mathrm{Sin}\frac{3\pi}{4}\right)$

(6)化简：$\sec A\cdot\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2A}$，$(90°<A\leqslant180°)$

解：$\sec A\cdot\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2A}=\mathrm{sce}A\cdot\sqrt{\cos^2A}=\sec A\cdot(-\cos A)=-1$

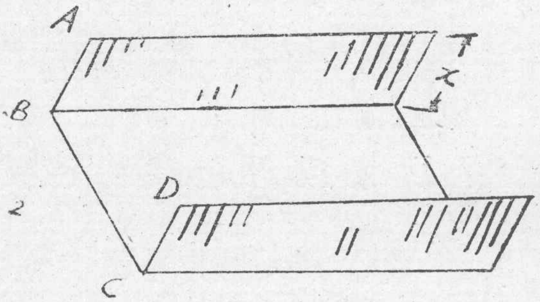
(7)已知圆锥的母线长为3cm，底面直径2cm，求它的侧面积（π取3.14）

解：$S_{侧}=\frac{1}{2}CL=\pi RL=3.14\times1\times3=9.42(cm^2)$

式中的C表示底面圆的周长，L表示母线长，R是底面圆的半径

2．（本题满分9分）

用宽为80cm的铁皮制作一个槽，槽的截面ABCD是一个矩形；



(1)求槽的截面积y关于槽深x的函数关系式；

(2)求出这个函数图象的顶点坐标、对称轴方程；

(3)当槽深为多少厘米时，槽的截面积最大？这个最大面积是多少平方厘米？

解：(1)若槽深为x，则槽宽就为$80-2x$，因此槽的截面积y关于槽深x的函数关系式是 $y=x(80-2x)=-2x^2+80x$

(2)$y=-2x^2+80x=-2(x-20)^2+800$

顶点坐标：(20，800)；对称轴方程：$x=20$

(3)当$x=20$时，y有极大值$800(cm^2)$

答：当槽深为20cm时，槽的载面积最大，这个最大载面积是$800cm^2$

3．（本题满分12分，每小题6分）

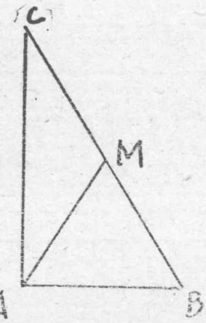
(1)写出$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3\sqrt[5]{x}}\right)^n$的展开式的第$(r+1)$项

解：第（r+1）项

$$T_{r+1}=(-1)\ C_n^r\ (\tfrac{2}{3})\ (x^{-\frac{1}{5}})^r(x^{\frac{1}{3}})^{n-r}=(-1)^r C_n^r\ (\tfrac{2}{3})^r x^{\frac{5n-8r}{15}}$$

（2）设AM是直角三角形斜边BC上的中线，求证：

$BC^2+AC^2+AB^2=8AM^2$



证明：$\because AM=\frac{1}{2}BC$

$\therefore 8AM^2=8\cdot(\frac{1}{2}BC^2)=2BC^2$

又根据勾股定理$AB^2+AC^2=BC^2$，有

$AB^2+AC^2+BC^2=BC^2+BC^2=2BC^2$

$\therefore AB^2+AC^2+BC^2=8AM^2$

4．（本题满分18分，①题 8 分，②题10分）

①化简：$\sqrt{5^{2\,Log_5(Lgx)}-2\,Lgx+1}$，

解：$\sqrt{5^{2\,Log_5(Lgx)}-2\,Lgx+1}=\sqrt{(Lgx)^2-2\,Lgx+1}$

$$=\sqrt{(Lgx-1)^2}=\begin{cases} Lgx-1=Lg\frac{x}{10}, & (x\geqslant 10\text{时}) \\ 1-Lgx=Lg\frac{10}{x}, & (1<x<10\text{时}) \end{cases}$$

（因为Lgx本身是另一对数的真数，要求$Lgx>0$，$x>1$）

②求下面数列的前n项和：

$$Lg\frac{1}{3}+Lg\frac{10}{3^2}+Lg\frac{100}{3^4}+Lg\frac{1000}{3^8}+\cdots\cdots$$

解：前n项的和

$$S_n=Lg\frac{1}{3}+Lg\frac{10}{3^2}+Lg\frac{100}{3^4}+\cdots+Lg\frac{10^{n-1}}{3^{2^{n-1}}}$$

$$=(Lg1+Lg10+Lg100+\cdots Lg10^{n-1})-(Lg3+Lg3^2+Lg3^4+\cdots+Lg3^{2^{n-1}})$$

$$=(0+1+2+\cdots+(n-1))-(Lg3)(1+2+4+\cdots+2^{n-1})$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}-(2^n-1)Lg3$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}+(1-2^n)Lg3$$

5．（本题满分10分）

已知△ABC的三个内角A、B、C 成等差数列，且最大角与最小角的对边之比是$(\sqrt{3}+1):2$，试求此三角形三个内角的度数。

解：假定三内角以A、B、C次序由大到小成等差数列，则　　$A+C=2B$

所以　　$A+B+C=2B+B=3B=180°$　　$B=60°$，　　$A+C=120°$

又已知$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

而 $\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(120°-C)}{\sin C}=\frac{\sin 120°\cos C-\cos 120°\sin C}{\sin C}$

$=\sin 120°\operatorname{ctg}C-\cos 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}C+\frac{1}{2}$

所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}C+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，　　$\operatorname{ctg}C=1$

$\therefore C=45°$，$A=120°-45°=75°$

答：三角形三内角是75°，60°，45°.

6．（本题满分10分）

设P（8，2）为平面直角坐标系上一点，$y^2=x$是曲线，$y-x-1=0$是一直线，

（1）求过P点与直线$y-x-1=0$平行的直线方程；

（2）求所求的直线与已知曲线交点的坐标；

（3）作出它们的图象。

解：（1）直线$y-x-1=0$的斜率$k_1=1$，因此过（8，2）和$y-x-1=0$平行的直线方程是

$\frac{y-2}{x-8}=1$　　或者写成$y-x+6=0$

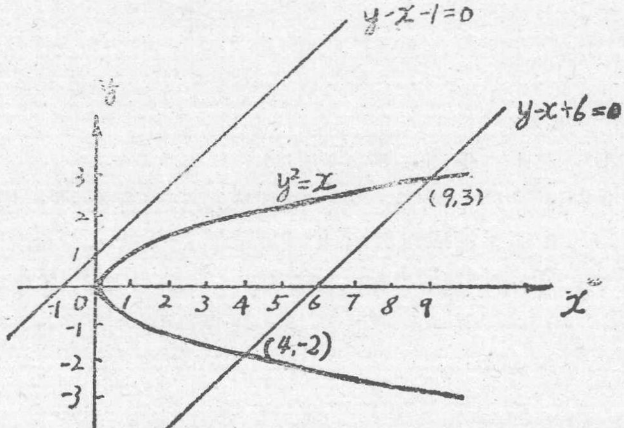
（2）直线$y-x+6=0$和曲线$y^2=x$的交点坐标(x，y)应满足下面方程组：

$\begin{cases} y-x+6=0 \\ y^2=x \end{cases}$

解这个方程组，得　$\begin{cases} x_1=9 \\ y_1=3 \end{cases}$　　和$\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=-2 \end{cases}$

因此，它们的交点坐标是（9，3），（4，-2）

（3）图象如下：



7．（本题10分）

判断下列方程的轨迹，并画图象： $25x^2-14xy+25y^2-288=0$

解：作坐标旋转变换，假定坐标系向逆时针方向旋转φ角度，在原坐标系中（x，y）的点在新坐标系下为（x′，y′）．则有变换公式：

$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi$（1） $y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$（2）

将（1），（2）代入原方程：

$$25(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)^2-14(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)$$
$$-25(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)^2-288=0$$

整理后，得

$$(25-14\sin\varphi\cos\varphi)x'^2+(25+14\sin\varphi\cos\varphi)y'^2+14(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)x'y'$$
$$-288=0 \qquad (3)$$

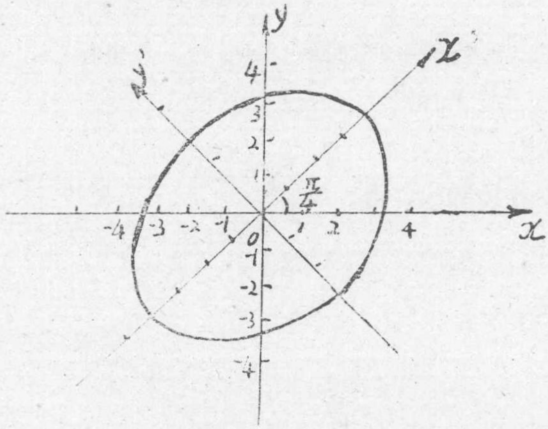
令$14(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=0$（目的为使$x'y'$项的系数为0）

$$\varphi=\frac{\pi}{4}$$

这时方程（3）化为 $9x'^2+16y'^2-144=0$

即$\dfrac{x'^2}{4^2}+\dfrac{y'^2}{3^2}=1$

从而断定，原方程的轨迹是个椭圆，其图象如下：



8．（本题两小题作一小题，满分10分）

（1）用0到9这10个数字，可以排列成多少个含有两个重复数字的三位数？

解：从0到9排成可以有重复数字的三位数的个数是10^3-10^2．从0到9排成没有重复数字的三位数的个数是$A_{10}^3-A_9^2$ 同一个数字组成的三位数(如111，222，…）的个数是9．因此，从0到9这10个数字可排成含有两个重复数字的三位数的个数是

$$(10^3-10^2)-(A_{10}^3-A_9^2)-9=243（个）$$

（2）用数学归纳法证明$x^n - y^n$能够被$x - y$整除（n为自然数）

证明：当$n = 1$时，$x^1 - y^1$能够被$x - y$整除，命题成立．假定当$n = k$时命题成立，

即 “$x^k - y^k$能被$x - y$整除”

那末

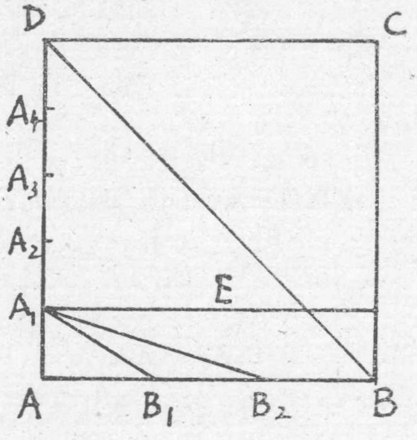
$$x^{k+1} - y^{k+1} = x \cdot x^k - yy^k + xy^k - xy^k = x(x^k - y^k) + y^k(x - y)$$

因为$y^k(x - y)$能被$x - y$整除，由假定可知$x(x^k - y^k)$也能够被$x - y$整除，所以$x^{k+1} - y^{k+1}$也能被$x - y$整除。即$n = k + 1$时，命题也成立．

根据数学归纳法原理，n为任何自然数时，$x^n - y^n$能被$x - y$整除．

附加题（满分20分）

如图，在矩形ABCD中，$A_1E \parallel AB$，$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4D = a$，$AB_1 = B_1B_2 = B_2B = \sqrt{3}a$，试用三种方法证明：$\angle B_1A_1E + \angle B_2A_1E + \angle BDC = \frac{\pi}{2}$



（注：三种方法是指每种方法各以代数、三角、几何知识为主来证明）

证法一：如图，$\because$ABCD是矩形，$A_1E \parallel AB$

$$\therefore tg\angle B_1A_1E = tg\angle A_1B_1A = \frac{AA_1}{AB_1} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \angle B_1A_1E = \frac{\pi}{6}$$

$$又tg\angle B_2A_1E = tg\angle A_1B_2A = \frac{AA_1}{AB_2} = \frac{a}{2\sqrt{3}a} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

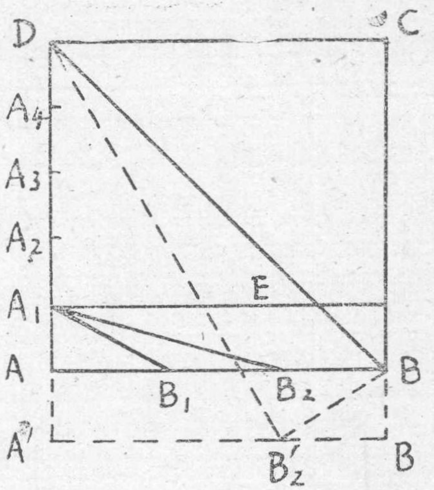
$$tg\angle BDC = tg\angle DBA = \frac{AD}{AB} = \frac{5a}{3\sqrt{3}a} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore tg(\angle B_2A_1E + \angle BDC) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{9}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{9}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \angle B_2A_1E + \angle BDC = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle B_1A_1E + \angle B_2A_1E + \angle BDC = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

证法二：延长DA到A'使$AA' = a$，过A'作$A'B' \parallel AB$且交BC的延长线于B'，在$A'B'$上截取$A'B'_2 = 2\sqrt{3}a$，连DB'_2，B'_2B（如图）



那末在直角三角形B_1AA_1及直角三角形$DA'B'_2$中

$$\therefore \frac{B_1A}{DA'}=\frac{\sqrt{3}a}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\frac{AA_1}{A'B'_2}=\frac{a}{2\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore \frac{B_1A}{DA'}=\frac{AA_1}{A'B_2'} \qquad \therefore \triangle B_1AA_1 \backsim \triangle DA'B'_2$$

$$\therefore \angle B_1A_1E=\angle A_1B_1A=\angle A'DB_2'$$

又在$\triangle DB_2'B$中

$$BD^2=(5a)^2+(3\sqrt{3}a)^2=52a^2$$

$$DB'^2_2=(6a)^2+(2\sqrt{3}a)^2=48a^2$$

$$B'_2B^2=(\sqrt{3}a)^2+a^2=4a^2$$

$$\therefore DB'^2_2+B'_2B^2=BD^2$$

$$\therefore \angle DB_2'B=90°$$

在直角三角形$DB_2'B$及直角三角形B_2AA_1中

$$\frac{DB_2'}{B_2A}=\frac{\sqrt{48a^2}}{2\sqrt{3}a}=\frac{4\sqrt{3}a}{2\sqrt{3}a}=2 \qquad \frac{B_2'B}{AA_1}=\frac{2a}{a}=2$$

$$\therefore \frac{DB_2'}{B_2A}=\frac{B_2'B}{AA_1}$$

$$\therefore \triangle DB_2'B \backsim \triangle B_2AA_1, \qquad \therefore \angle B_2A_1E=\angle AB_2A_1=\angle B_2'DB$$

$$\therefore \angle B_1A_1E+\angle B_2A_1E+\angle BDC=\angle A'DB'_2+\angle B'_2DB+\angle BDC=\frac{\pi}{2}$$

证法三：在矩形ABCD所在的平面内建立直角坐标系：以A点为坐标系的原点；以AB点所在的直线为x轴；以AD所在的直线为y轴；以a为长度单位.

设B_1A_1，B_2A_1，BD等所在直线的斜率分别为k_1，k_2，k_3.

那末 $$k_1=\frac{1-0}{1-\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$k_2=\frac{1-0}{0-2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$k_3=\frac{5-0}{0-3\sqrt{3}}=-\frac{5}{3\sqrt{3}}=-\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

∴直线B_1A_1与A_1E的夹角是$\angle B_1A_1E$，则

$$tg\angle B_1A_1E=\frac{0-(-\frac{\sqrt{3}}{3})}{1+0\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{3})}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle B_1A_1E=\frac{\pi}{6}$$

直线B_2A_1与A_1E的夹角是$\angle B_2A_1E$，则

$$\operatorname{tg}\angle B_2A_1E=\frac{0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{1+0\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

直线BD与DC的夹角是$\angle BDC$，则

$$\operatorname{tg}\angle BDC=\frac{0-\left(-\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)}{1+0\cdot\left(-\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

因而

$$\operatorname{tg}(\angle B_2A_1E+\angle BDC)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{5\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}}=\sqrt{3}$$

$$\therefore \angle B_2A_1E+\angle BDC=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle B_1A_1E+\angle B_2A_1E+\angle BDC=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}.$$