山东1977年高考数学试题解

一、解下列各题（每小题5分）

1．$\sqrt{(3-x)^2}=?$

解：$\sqrt{(3-x)^2}=\begin{cases}3-x, & 当x\leqslant 3时; \\ x-3, & 当x>3时\end{cases}$

2．$Lg2+Lg5+Lg\sqrt{10}+Lg0.01+Log_8Log_33=?$

解：$原式=Lg2+Lg5+\frac{1}{2}Lg10-2Lg10+Log_81$

$=Lg10+\frac{1}{2}Lg10-2Lg10+0=1+\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{2}$

3．写出函数定义域：

(1) $y=Log_a{}^x$，$(a>0)$；　　(2) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x+3}$

解：(1) $y=Log_a{}^x$，$(a>0)$的定义域为$x>0$

(2) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x+3}$的定义域为$x\geqslant 1$

4．写出过点(2,3)斜率为$-\frac{1}{2}$的直线方程

解：根据点斜式,所求的直线方程为　$y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$　即　$y=-\frac{1}{2}x+4$

5．求椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的焦点坐标

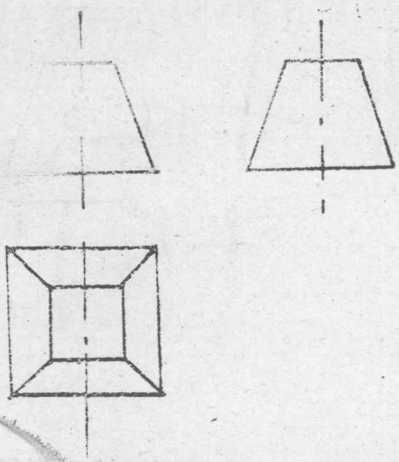
解：椭圆方程可写为　$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

其长半轴$a=5$，短半轴$b=4$．因此　$C=\sqrt{5^2-4^2}=3$

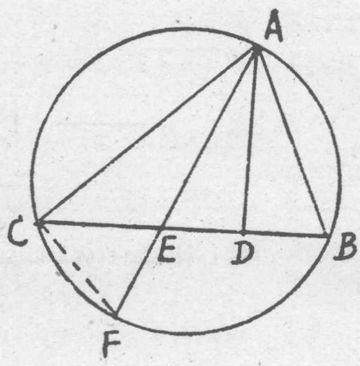
$\therefore$焦点坐标为$F_1(-3, 0)$，$F_2(3, 0)$

6．如右图所示的三视图是什么几何体？

答：右图所示的三视图是个正四棱台.



二、设AD是△ABC的高，在线段BC上取点E，使∠EAC＝∠BAD，延长AE交△ABC外接圆于点F．求证：AF是外接圆的直径.（10分）



证明：连接FC

在△ABD和△ACF中

∠EAC＝∠BAD(已知)，∠ABC＝∠AFC

（同圆中，同弧上圆周角相等）

而AD是△ABC的高，即∠ADB＝90°

∴∠ACF＝∠ADB＝90°

∴AF是△ABC外接圆的直径

三、$x^2-x\mathrm{Cos}\alpha+\frac{1}{4}\mathrm{Sin}^2\alpha=0$，（$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$）为关于x的二次方程，当α为何值时，方程有两个不相等的实数根？它的根是什么？（15分）

解：当二次方程的根的判别式△＞0时，方程　$x^2-x\mathrm{Cos}\alpha+\frac{1}{4}\mathrm{Sin}^2\alpha=0$

有两个不相等的实数根　$\triangle=\mathrm{Cos}^2\alpha-\mathrm{Sin}^2\alpha>0$　$\mathrm{Cos}2\alpha>0$

$\therefore 0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$　　$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$

这时方程的两个实数根是　$x_1=\frac{\mathrm{Cos}\alpha+\sqrt{\mathrm{Cos}2\alpha}}{2}$，　$x_2=\frac{\mathrm{Cos}\alpha-\sqrt{\mathrm{Cos}2\alpha}}{2}$

答：当$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$时，方程$x^2-x\mathrm{Cos}\alpha+\frac{1}{4}\mathrm{Sin}^2\alpha=0$有两个不相等的实数根

$$x=\frac{\mathrm{Cos}x\pm\sqrt{\mathrm{Cos}2\alpha}}{2}$$

四、在半径为R的一块圆形铁板上，剪去一个圆心角为α弧度的扇形，用剩下的铁板做一个圆锥形容器（铁板厚度和加工量不计）

1．用R和α表示圆锥底面半径r，圆锥高h，圆锥容积V

2．当$R=20cm$，$\alpha=\frac{2\pi}{5}$弧度时，计算圆锥容积V(取$\pi=3.14$，精确到$1cm^3$)（15分）

解：1．$\because 2\pi r=R(2\pi-\alpha)$，　$\therefore r=\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}R$

$$\text{而 } h^2=R^2-r^2=R^2-\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}R\right)^2=R^2-\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2$$

$$=R^2\left[1-\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}\right]=\frac{4\pi\alpha-\alpha^2}{4\pi^2}R^2$$

$$\therefore h=\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R$$

$$\therefore V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}R\right)^2\cdot\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R$$

$$=\frac{R^3(2\pi-\alpha)^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}$$

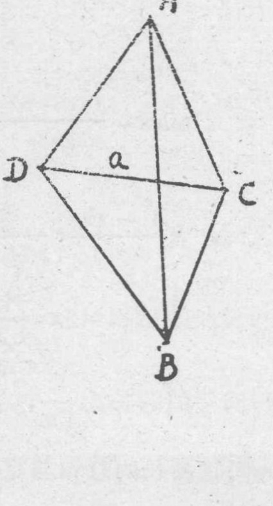
2．当$R=20cm$，$\alpha=\frac{2\pi}{5}$时，

$$V=\frac{20^3\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)^2}{24\pi^2}\sqrt{\left(4\pi-\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\frac{2\pi}{5}}=\frac{20^3\cdot\frac{64}{25}\pi^2}{24\pi^2}\cdot\sqrt{\frac{36\pi^2}{25}}$$

$$=1024\pi\approx3215(cm^3)$$

答：当$R=20cm$，$\alpha=\frac{2\pi}{5}$时，圆锥的容积约为$3215cm^3$.

五、我炮兵阵地位于A，两观察所分别设于C、D，已知△ACD为一正三角形，且CD=a，当目标出现于B时，测得∠CDB=45°，∠BCD=75°，求炮目距离AB。（15分）



解：$\angle B=180°-(45°+75°)=60°$　在△BCD中，由正弦定理知

$$BC=\frac{a\sin45°}{\sin60°}=\frac{a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

在△ABC中，根据余弦定理

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB}$$

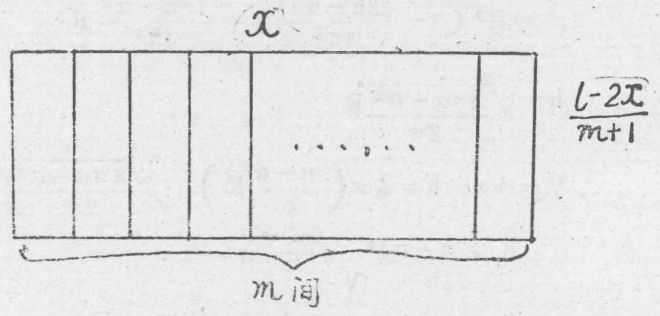
$$=\sqrt{a^2+\frac{2}{3}a^2-2a\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a\cos(75°+60°)}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{3}a^2+\frac{2\sqrt{6}}{3}a^2\cos45^\circ}=\sqrt{\frac{5}{3}a^2+\frac{2\sqrt{6}}{3}a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{3}}a=\frac{\sqrt{15+6\sqrt{3}}}{3}a.$$

答：炮目距离$AB=\frac{\sqrt{15+6\sqrt{3}}}{3}a$.

六、现有可建猪圈L米的材料，要建彼此相连的m间面积相等的矩形猪圈（如下图）（门在内，墙的厚度不计）。怎样设计每间猪圈的长和宽，才能使所建的猪圈的总面积最大？按这种设计，m间猪圈长的总和与宽的总和有什么关系？（15分）



解：设此猪圈的长为x米，则宽就为$\frac{L-2x}{m+1}$米。猪圈的总面积

$$S=x\cdot\frac{L-2x}{m+1}=-\frac{2}{m+1}x^2+\frac{L}{m+1}x$$

面积是长度x的二次函数，其中 $a=-\frac{2}{m+1}$，$b=\frac{L}{m+1}$，$C=0$

$\because a<0$，$\therefore$当$x=-\frac{b}{2a}=\frac{\frac{L}{m+1}}{\frac{4}{m+1}}=\frac{L}{4}$时，面积S最大

$$S_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-\left(\frac{L}{m+1}\right)^2}{-\frac{8}{m+1}}=\frac{L^2}{8(m+1)}$$

这时，宽$\frac{L-2x}{m+1}=\frac{L}{2(m+1)}$　　每间的长$\frac{x}{m}=\frac{L}{4m}$

猪圈长的总和$=2x=\frac{L}{2}$，宽的总和$=L-\frac{L}{2}=\frac{L}{2}$

答：每间猪圈的长为$\frac{L}{4m}$，宽为$\frac{L}{2(m+1)}$时，才能使所建猪圈总面积最大。按这种设计，m间猪圈长的总和与宽的总和相等。

参考题（不作录取成绩，考生可视能力尽量作）

一、求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

解：根据洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}\Rightarrow\infty \qquad \text{因此} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}\text{不存在}$$

二、利用定积分证明：椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的面积$S=\pi ab$

证明：先求椭圆在第一象限内的面积S'

$$S'=\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

令$x=a\mathrm{Sin}t$，则$\sqrt{a^2-x^2}=a\mathrm{Cos}t$，$dx=a\mathrm{Cos}t\,dt$ （$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$），

$$\text{因此}S'=\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\mathrm{Cos}t\cdot a\mathrm{Cos}t\,dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}^2t\,dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{Cos}2t+1}{2}dt$$

$$=ab\left(\frac{\mathrm{Sin}2t}{4}+\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab\pi}{4}$$

由对称性，椭园的面积　$S=4S'=ab\pi$