山 东 省(B)

一、解下列各题：

1. $\sqrt{(-a)^2}=?$

解：$\sqrt{(-a)^2}=\begin{cases} a & (a\geqslant o) \\ -a & (a<o) \end{cases}$.

2. $\log_{\frac{1}{2}}[(1-\cos^2\frac{\pi}{6})\operatorname{ctg}^{-2}\frac{\pi}{4}]=?$

解：原式 $=\log_{\frac{1}{2}}[(1-\frac{3}{4})\cdot 1]=2$.

3. 写出下列函数的定义域：

$$(1)\ y=\frac{\sqrt{|x-3|}}{x-2};\qquad (2)\ y=\lg(x+3).$$

解 $(1)\ x\neq 2$； $(2)\ x>-3$.

4. 写出过(0，1)和(2，3)两点的直线方程.

解：由直线方程的两点式，得：

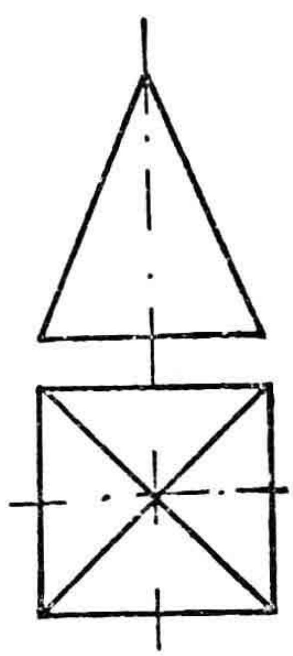
$$\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-0}{2-0},$$

化简，得 $x-y+1=0$.

5. 写出双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程.

解：∵ $a=4$，$b=3$，

∴ 渐近线方程为 $\frac{x}{4}\pm\frac{y}{3}=0$



6. 如图所示的二视图是什么几何体？

解：正四棱锥.

二、▱ABCD的二邻边之比为 $1:2$，M 为大边AB的中点，连接MD，MC，求证：$\angle DMC=\frac{\pi}{2}$.

证明：∵ $AB:AD=2:1$，$AM=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore AM = AD$,

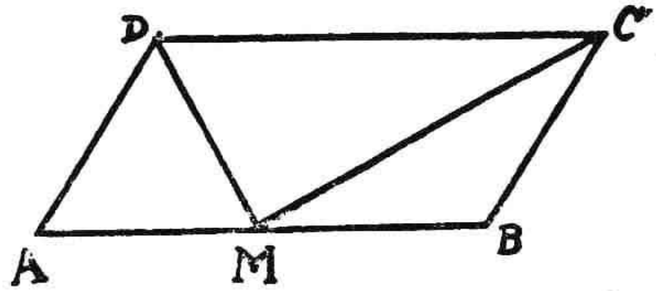
$\therefore \angle ADM = \angle AMD$,

$\because \angle AMD = \angle MDC$,

$\therefore \angle ADM = \angle MDC$,

即 $\angle MDC$

$= \frac{1}{2}\angle ADC$,



同理 $\angle MCD = \frac{1}{2}\angle BCD$

$\therefore \quad \angle MDC + \angle MCD$

$= \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle BCD)$

$= \frac{1}{2} \times \pi = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \angle DMC = \frac{\pi}{2}$.

三、$\frac{\sin\alpha}{2}x^2 + x + \frac{1}{2\cos\alpha} = 0 \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

为关于 x 的二次方程。当 α 为何值时，方程有两个不相等的实数根？它的根是什么？

解：$\because$ 方程有两个不相等的实数根，

$\therefore \quad b^2 - 4ac > 0$,

即 $1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 - \mathrm{tg}\,\alpha > 0$,

亦即 $\mathrm{tg}\,\alpha < 1$,

$\therefore \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$时，方程有两个不相等的实数根 .

方程的根为 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-\operatorname{tg}\alpha}}{\sin\alpha}$.

四、试比较等底等高的正四棱锥和正圆锥的侧面积，看哪个的侧面积较小.

解：设正四棱锥和圆锥的底面积为S，高为h.

则正四棱锥底面边长为$\sqrt{S}$，斜高为$\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{S}}{2}\right)^2+h^2}$

$$=\sqrt{\frac{S}{4}+h^2},$$

圆锥的底面半径 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$,

母线 $l=\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}\right)^2+h^2}=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}+h^2}$,

$$\therefore\quad S_{\text{正四棱锥侧}}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{S}\sqrt{\frac{S}{4}+h^2}$$

$$=\sqrt{S^2+4Sh^2},$$

$$S_{\text{圆锥侧}}=\pi\cdot\sqrt{\frac{S}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{S}{\pi}+h^2}$$

$$=\sqrt{S^2+\pi Sh^2},$$

$\because \pi<4$,

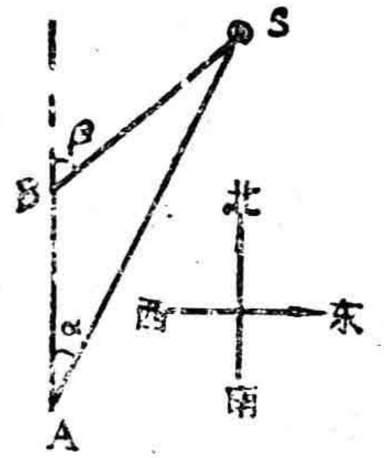
$\therefore\quad S_{\text{圆锥侧}}<S_{\text{正四棱锥侧}}$.

五、一只船以v海里/小时的速度向正北航行，在A处望见灯塔在船的北α度东，继续航行t小时后，在B处望见S在船的北β度东，求第二次望见灯塔S时船和灯塔的距离BS.

解：在△ABS中，AB = vt，

$\angle A=\alpha$，$\angle S=\beta-\alpha$

由正弦定理得

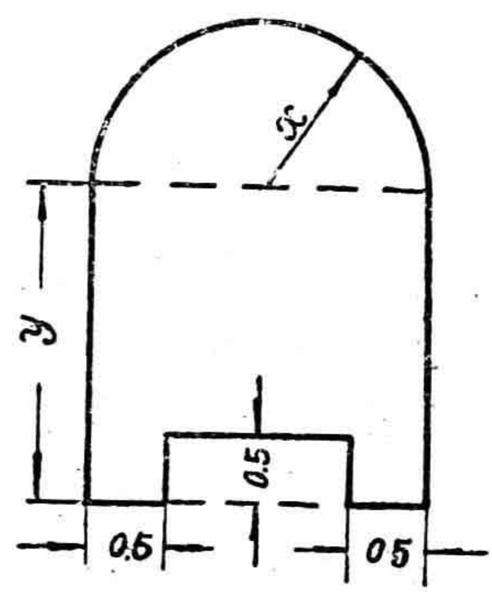


$$\frac{BS}{\sin\alpha}=\frac{vt}{\sin(\beta-\alpha)}\text{。}$$

$$\because BS=\frac{vt\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

六、某隧道的横断面如图所示，已知隧道横断面的周长为23米，试根据图所示尺寸，求当x和y为何值时，隧道的横断面的面积最大？最大面积是多少？（取$\pi\approx 3$）

（图尺寸单位：米）



解：设半圆的半径为x米，隧道横断面面积为S平方米.

则 $y\approx(23-3x-0.5\times 2-2x)\times\frac{1}{2}$

$=(11-2.5x)$米.

$$\therefore\quad S\approx\frac{3x^2}{2}+2x\cdot(11-2.5x)-(2x-1)\times 0.5$$

$$=-3.5x^2+21x+0.5$$

$\because\quad -3.5<0$

$\therefore$ 当$x=-\frac{21}{2\times(-3.5)}=3$时，S有最大值

$$S_{max} = \frac{4\times(-3.5)\times 0.5 - 21^2}{4\times(-3.5)} = 32\ (米^2)$$

当 $x = 3$ 时，$y = 11 - 2.5\times 3 = 3.5$（米）

答：当半圆的半径 x 为3米，y 为3.5米时隧道的横断面面积最大，最大面积为32米^2。

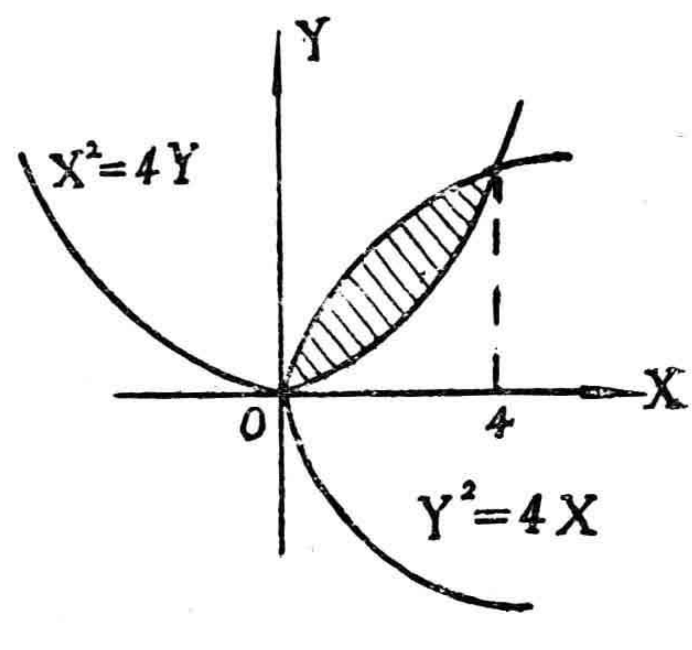
参考题：

一、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ln(1+x)]'}{x'}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1 .$$

二、用定积分求抛物线 $y^2 = 4x$ 与 $x^2 = 4y$ 所围成的曲边形面积.



解：设曲边形面积为 S

解方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases}$

得两交点的横坐标

$x = 0$ 与 $x = 4$.

$$\therefore S = \int_0^4 2\sqrt{x}\,dx - \int_0^4 \frac{1}{4}x^2\,dx$$

$$= 2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^4$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{16}{3}.$$