山西1977年高考数学试题解

1、化简下列各题：（20分）

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$；　　(2) $\dfrac{(a^2-b^2)^3}{a^3+b^3}\div\dfrac{(b+a)^2}{a^2-ab+b^2}\times\dfrac{1}{(b-a)^3}$；

(3) $\dfrac{2\mathrm{Lg}6-\mathrm{Lg}3}{1+\frac{1}{2}\mathrm{Lg}0.36+\frac{1}{3}\mathrm{Lg}8}$；　　(4) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3-1}+\dfrac{x(x-2)-2(x-2)}{x^2-3x+2}$.

解：(1)原式$=\dfrac{(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)=-2$.

(2)原式$=\dfrac{(a+b)^3(a-b)^3}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\cdot\dfrac{a^2-ab+b^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{1}{-(a-b)^3}=-1$.

(3)原式$=\dfrac{\mathrm{Lg}\dfrac{6^2}{3}}{\mathrm{Lg}10+\mathrm{Lg}0.6+\mathrm{Lg}2}=\dfrac{\mathrm{Lg}12}{\mathrm{Lg}(10\times0.6\times2)}=\dfrac{\mathrm{Lg}12}{\mathrm{Lg}12}=1$

(4)原式$=\dfrac{(x^2+1)^2-x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}+\dfrac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}+\dfrac{x-2}{x-1}$

$=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$.

二、作下列各题（20分）

1．当a、b、c＞0时，求证：$\mathrm{Log}_a b\cdot \mathrm{Log}_b c\cdot \mathrm{Log}_c a=1$.

证明：∵a、b、c＞0

$$\therefore \mathrm{Log}_a b=\frac{\mathrm{Lg}b}{\mathrm{Lg}a},\ \mathrm{Log}_b c=\frac{\mathrm{Lg}c}{\mathrm{Lg}b},\ \mathrm{Log}_c a=\frac{\mathrm{Lg}a}{\mathrm{Lg}c}$$

$$\therefore \mathrm{Log}_a b\cdot \mathrm{Log}_b{}^c\cdot \mathrm{Log}c^a=\frac{\mathrm{Lg}b}{\mathrm{Lg}a}\cdot\frac{\mathrm{Lg}c}{\mathrm{Lg}b}\cdot\frac{\mathrm{Lg}a}{\mathrm{Lg}c}=1.$$

2．已知 $y=\mathrm{Lg}\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$，求定义域.

解：要使$y=\mathrm{Lg}\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$有意义，必须$\begin{cases}1-\sqrt{1-x}>0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$

解此不等式组，得　　$0<x\leqslant 1$

∴函数$y=\mathrm{Lg}\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$的定义域为　$0<x\leqslant 1$.

3．汽车往返甲乙两地之间，上行速度为30公里/小时，下行速度为60公里/小时。求往返平均速度.

解：设甲、乙两地间的距离为m公里，往返平均速度为$\overline{V}$公里/小时，则上行时间为

$t_1=\dfrac{m}{30}$　　下行时间为　$t_2=\dfrac{m}{60}$

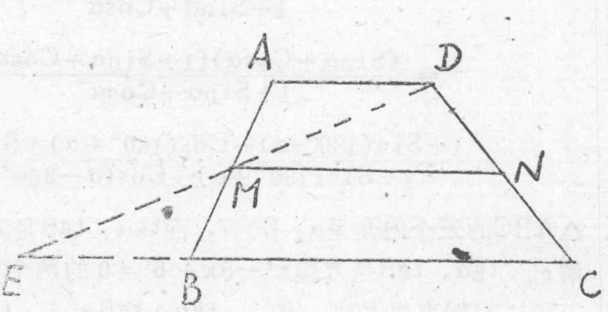
$$\therefore\ \overline{V}=\frac{2m}{t_1+t_2}=\frac{2m}{\frac{m}{30}+\frac{m}{60}}=40\text{（公里/小时）}$$

答：往返平均速度为40公里/小时.

三、试证梯形的中位线平行于两底，且等于两底和的一半。（10分）

已知：如图，梯形ABCD，

AD∥BC，M、N分别为AB、DC之中点.



求证：（1）MN∥AD，MN∥BC.

（2）$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$

证明：

连接DM并延长交底边BC的延长线于E.

∵M、N为AB、DC之中点，

∵AM＝BM（已知）　　∠EMB＝∠AMD（对顶角相等）

∠MBE＝∠MAD(内错角相等)

∴△EBM≌△DAM（a、s、a）

$\therefore AD=BE$（全等三角形的对应边相等）　　$EM=DM$（同理）

又$\because EM=DM, DN=NC$　$\therefore MN$为$\triangle DEC$的中位线

$\therefore MN \parallel BC \parallel AD$

$\therefore MN=\frac{1}{2}EC=\frac{1}{2}(EB+BC)=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

四、有一块形状为直角三角形的白铁皮，其一直角边和斜边分别为6dm和10dm。若从这块白铁皮剪一块最大圆材料，求这圆材料的面积有多大？（π取3.14）（10分）

解：要从这块白铁皮剪得最大圆材料，则此圆必须是这个直角三角形的内切圆。

设此内切圆的半径为r，直角三角形三边分别为

$a=6$，$c=10$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

三角形的半周长 $S=\frac{1}{2}(6+8+10)=12$.

$$\therefore r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\sqrt{\frac{(12-6)(12-8)(12-10)}{12}}=2$$

故此内切圆的面积为　$\pi r^2 \approx 3.14\times 2^2=12.56\ (dm^2)$

答：剪得的最大圆材料的面积约为$12.56dm^2$.

五、证明恒等式：

$$\frac{1+Sin(180°-\alpha)-Cos(180°+\alpha)+Sin2\alpha}{1-Sin(180°+\alpha)+Cos(\alpha-360°)}=Sin\alpha+Cos\alpha.\quad(10分)$$

证明：左边$=\frac{1+Sin\alpha+Cos\alpha+2Sin\alpha Cos\alpha}{1+Sin\alpha+Cos(360°-\alpha)}$

$$=\frac{Sin^2\alpha+Cos^2\alpha+2Sin\alpha Cos\alpha+Sin\alpha+Cos\alpha}{1+Sin\alpha+Cos\alpha}$$

$$=\frac{(Sin\alpha+Cos\alpha)^2+(Sin\alpha+Cos\alpha)}{1+Sin\alpha+Cos\alpha}$$

$$=\frac{(Sin\alpha+Cos\alpha)(1+Sin\alpha+Cos\alpha)}{1+Sin\alpha+Cos\alpha}=Sin\alpha+Cos\alpha=右边$$

$$\therefore \frac{1+Sin(180°-\alpha)-Cos(180°+\alpha)+Sin2\alpha}{1-Sin(180°+\alpha)+Cos(\alpha-360°)}=Sin\alpha+Cos\alpha$$

六、$\triangle ABC$的三个内角是α、β、γ，而$tg\alpha$、$tg\beta$是方程$x^2-5x+6=0$的两个根。求γ.

解：$\because tg\alpha$，$tg\beta$是方程$x^2-5x+6=0$的两个根.

$\therefore$根据韦达定理，有　$tg\alpha+tg\beta=5$，$tg\alpha\cdot tg\beta=6$

而　$tg\gamma=tg[180°-(\alpha+\beta)]=-tg(\alpha+\beta)=-\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=-\frac{5}{1-6}=1$

$\therefore\quad \gamma=45°$.

七、抛物线的顶点在原点，对称轴为y轴，过点（1，－1），求抛物线方程，焦点坐标，准线方程，开口方向。（8分）

解：因为抛物线的顶点在原点，对称轴为y轴，

所以此抛物线的标准方程为　　$x^2=-2py$

抛物线过点（1，－1），则　　$1^2=-2px(-1)$　　$\therefore p=\frac{1}{2}$

因此抛物线的方程为：$x^2=-y$

焦点坐标为 $(0,-\frac{1}{4})$　　准线方程 $y=\frac{1}{4}$　　抛物线开口向下

八、当k取何值时，直线 $kx-y-3=0$ 与圆 $2x^2+2y^2-9=0$ 相切，并求出切点坐标（12分）

解：解方程组 $\begin{cases} kx-y-3=0 \\ 2x^2+2y^2-9=0 \end{cases}$

得直线和圆的交点坐标是：$x=\dfrac{6k\pm3\sqrt{2(k^2-1)}}{2(k^2+1)}$　　$y=\dfrac{-6\pm3k\sqrt{2(k^2-1)}}{2(k^2+1)}$

当 $2(k^2-1)=0$，即 $k=\pm1$ 时，直线和圆相切，其切点坐标为

$(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$，$(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$

参考题

1．已知 $f(x)=x\mathrm{Ln}(2-x)+\sqrt{1+3x^2}$，求 $f'(1)$

解：$f'(x)=\mathrm{Ln}(2-x)-\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{3x}{\sqrt{1+3x^2}}$

$\therefore f'(1)=\mathrm{Ln}\,1-\dfrac{1}{2-1}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$

2．一水库的水闸为一等腰梯形，上底为8米，下底为4米，高为10米。求当水面与上底相齐时水闸所受的压力。（已知水的比重为1吨重/立方米）

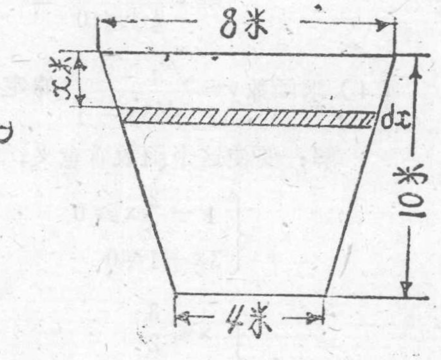
解：我们知道

压力（F）＝压强(P)×面积(S)

根据物理学知识，水面以下x米处的压强等于深度（x）与水的比重的乘积，即

$P=x\cdot1=x$（吨重/平方米）

假定这个压强作用在闸的一个水平面积元上（如图），其高为



dx，长为 $8-\dfrac{8-4}{10}x=8-\dfrac{2}{5}x$，那末，此面积元所受的压力为

$$d_F=p\,(8-\frac{2}{5}x)dx=x\,(8-\frac{2}{5}x)dx$$

因此，总压力为　　$F=\int d_F=\int_0^{10}x\,(8-\frac{2}{5}x)dx=(4x^2-\frac{2x^3}{15})\Big|_0^{10}$

$=\dfrac{800}{3}$（吨）　　答：水闸所受的压力为 $\dfrac{800}{3}$ 吨。