广东1977年高考数学试题解

一、计算（22分）：

（1）$(-3)^2-(-1\frac{1}{2})^3\times\frac{2}{9}-6\div|-\frac{2}{3}|$

解：原式$=9+\frac{27}{8}\times\frac{2}{9}-6\div\frac{2}{3}=9+\frac{3}{4}-9=\frac{3}{4}$

(2) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x}\cdot\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}$

解：原式$=\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)}\cdot\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x^2-1}$

(3) $\dfrac{\sqrt{20}}{8}-\sqrt{\dfrac{9}{5}}+\dfrac{5}{\sqrt{45}}$

解：原式$=\dfrac{2\sqrt{5}}{8}-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}+\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{30\sqrt{5}-72\sqrt{5}+40\sqrt{5}}{120}=-\dfrac{\sqrt{5}}{60}$

二、解方程：（10分）

$\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{x+1}{x-2}-1=0$，并检验所得的结果是否是原方程的根

解：去分母，得 $(x+3)(x-2)+(x+1)(x+2)-(x+2)(x-2)=0$

整理后，得 $x(x+4)=0$

因此 $x_1=0$，$x_2=-4$

检验：把$x=0$和$x=-4$分别代入分母$(x+2)(x-2)$中，其值均不为零，因此$x=0$和$x=-4$都是原方程的根.

三、计算：（16分）

(1) $(\frac{1}{2})^{-1}-4\times(-2)^{-3}+(\frac{1}{2})^0-9^{-\frac{1}{2}}$

解：原式$=2-\dfrac{4}{(-2)^3}+1-\dfrac{1}{\sqrt{9}}=2+\dfrac{4}{8}+1-\dfrac{1}{3}=3\dfrac{1}{6}$

(2) $2\mathrm{Lg}\,a^{\frac{1}{3}}b^2-\mathrm{Lg}\dfrac{\sqrt{b}}{8}-3\mathrm{Lg}2$，其中$\mathrm{Lg}a=0.33$，$\mathrm{Lg}b=0.22$

解：原式$=\dfrac{2}{3}\mathrm{Lg}a+4\mathrm{Lg}b-\dfrac{1}{2}\mathrm{Lg}b+3\mathrm{Lg}2-3\mathrm{Lg}2=\dfrac{2}{3}\mathrm{Lg}a+\dfrac{7}{2}\mathrm{Lg}b$

$=\dfrac{2}{3}\times0.33+\dfrac{7}{2}\times0.22=0.22+0.77=0.99.$

四、证明恒等式：（10分）

$\left(\dfrac{1}{\cos x}+1\right)\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)\mathrm{ctg}x=\mathrm{tg}x$

〔证一〕左边$=\left(\dfrac{1}{\cos^2x}-1\right)\mathrm{ctg}x=(1+\mathrm{tg}^2x-1)\mathrm{ctg}x=\mathrm{tg}^2x\cdot\mathrm{ctg}x=\mathrm{tg}x=$右边.

$\therefore\left(\dfrac{1}{\cos x}+1\right)\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)\mathrm{ctg}x=\mathrm{tg}x$

〔证二〕：左边$=\dfrac{1+\cos x}{\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\cos x}\cdot\mathrm{ctg}x=\dfrac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\mathrm{ctg}x$

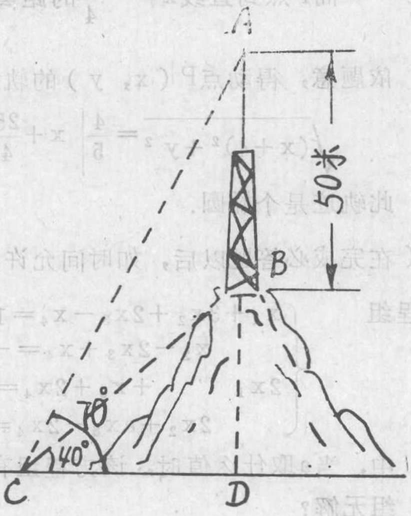
$$=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg}x=\text{右边}$$

$$\therefore\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}x$$

五、已知小山上的电视发射塔AB的高是50米，自山下地面的C点测得塔底B的仰角是40°，塔顶A的仰角是70°，求小山BD的高。（12分）（精确到0.01米，

$\sin 40°=0.643$，

$\sin 20°=0.342$）



解：$\angle A=180°-90°-70°=20°$

$\angle ACB=70°-40°=30°$

在△ABC中，由正弦定理得

$$BC=\frac{AB\sin A}{\sin\angle ACB}=\frac{50\times\sin 20°}{\sin 30°}$$

$$=100\sin 20°$$

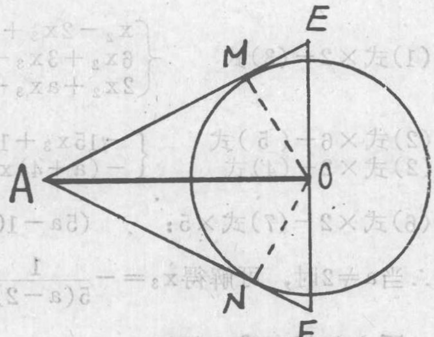
在Rt△BDC中，

$$BD=BC\sin 40°=100\sin 20°\cdot\sin 40°$$

$$=100\times 0.342\times 0.643\approx 21.99(\text{米})$$

答：小山BD的高约为21.99米.

六、如图，已知AE和AF是⊙O的切线，M、N是切点，EF过圆心且垂直于AO.



求证：AE＝AF.

证明：连接OM，ON.

∵M、N是切点，∴OM⊥AE，ON⊥AF.

在Rt△OMA和Rt△ONA中

∵OA＝OA（公共边），OM＝ON（圆的半径相等）

∴△OMA≌△ONA

∴∠EAO＝∠FAO(对应角相等)。在Rt△AOE和Rt△AOF中，

∵OA＝OA（公共边），∠EAO＝∠FAO(已证)

∴△AOE≌△AOF

∴AE＝AF　（对应边相等）

七. 如果平面内一动点P到点（-4，0）的距离等于它到直线$x=-\frac{25}{4}$的距离的$\frac{4}{5}$，求P点

的轨迹方程，又这是一条什么曲线？

解：设动点P的坐标（x，y）．则P到点（−4，0）的距离是

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}$$

而P点到直线$x=-\frac{25}{4}$的距离是 $\left|x+\frac{25}{4}\right|$

依题意，得动点P（x，y）的轨迹方程：

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}=\frac{4}{5}\left|x+\frac{25}{4}\right| \qquad \text{即} \quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

此轨迹是个椭圆．

参考题（在完成必答题以后，如时间允许，可以选做）

一、方程组
$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_2-2x_3+x_4=-1 \\ 2x_1+x_3+2x_4=0 \\ 2x_2+ax_3-2x_4=1 \end{cases}$$

中，当a取什么值时，该方程组有解？（有多少组解？）又当a取什么值时，方程组无解？

解：解法一
$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-x_4=1 & (1) \\ x_2-2x_3+x_4=-1 & (2) \\ 2x_1+x_3+2x_4=0 & (3) \\ 2x_2+ax_3-2x_4=1 & (4) \end{cases}$$

(1)式×2−(3)式
$$\begin{cases} x_2-2x_3+x_4=-1 & (2) \\ 6x_2+3x_3-4x_4=2 & (5) \\ 2x_2+ax_3-2x_4=1 & (4) \end{cases}$$

(2)式×6−(5)式
(2)式×2−(4)式
$$\begin{cases} -15x_3+10x_4=-8 & (6) \\ -(a+4)x_3+4x_4=-3 & (7) \end{cases}$$

(6)式×2−(7)式×5：　$(5a-10)x_3=-1$

∴当$a\neq2$时，可解得$x_3=-\frac{1}{5(a-2)}$，然后可分别唯一的求得x_1，x_2，x_4的值，

原方程组有唯一组解，

当a＝2时，原方程组无解．

解法二、　方程组的系数行列式

$$|\Delta|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix}$$

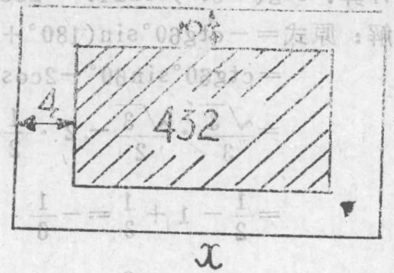
$$=(-12-2a)+2(16-4a)=10(2-a)$$

当$a\neq 2$时，$|\Delta|\neq 0$，∴原方程组有唯一组解，

当$a=2$时、$|\Delta|=0$而方程组又非齐次，∴原方程组无解.

二、有一份印刷品，其排版面积（矩形）占432平方厘米，它的两边都留有4厘米宽的空白，顶部和底部留有3厘米宽的空白。问应该如何选取纸张的尺寸，才能使纸的用量最少？

解：设选取的纸张左右长x厘米，上下宽y厘米。面积为S平方厘米．则



有 $(x-8)(y-6)=432$　(1)

$S=xy$　(2)

由(1)得　$y=\dfrac{432}{x-8}+6$

代入(2) $S=xy=\dfrac{432x}{x-8}+6x$

$$=\frac{432(x-8)+3456}{x-8}+6(x-8)+48$$

$$=432+\frac{3456}{x-8}+6(x-8)+48$$

$$=\frac{3456}{x-8}+6(x-8)+480$$

$$\geqslant 2\sqrt{3456\times 6}+480=\text{常数}$$

∴当$\dfrac{3456}{x-8}=6(x-8)$时，等式成立，S有最小值

解方程$\dfrac{3456}{x-8}=6(x-8)$，得$x_1=32(cm)$，$x_2=-16$（负的不合题意，舍去）

这时$y=\dfrac{432}{x-8}+6=24(cm)$

即$x=32cm$，$y=24cm$时，S达最小值，这时用纸最少.

答：当选取的纸左右长32mc，上下宽24cm时，纸的用量最少.