新疆1977年高考数学试题解

（理 工 科）

一、计算(每小题 6 分)

1．$3^{\text{Log}_3\frac{1}{27}}=($　　$)$；　$\text{Log}_{10}(\text{Log}_{10}10)=($　　$)$

解：$3^{\text{Log}_3\frac{1}{27}}=\frac{1}{27}$；　$\text{Log}_{10}(\text{Log}_{10}10)=\text{Log}_{10}1=0$

2．当a取什么值时，方程$x^2-2x+\text{Lg}a=0$有实数根

解：要使方程$x^2-2x+\text{Lg}a=0$有实数根，这个方程的判别式必须不小于零，

即　$(-2)^2-4\text{Lg}a\geqslant 0$

得　$\text{Lg}a\leqslant 1$　　$a\leqslant 10$　　(1)

又因为a是真数，所以　　$a>0$　　(2)

综合(1)和(2)，得　　$0<a\leqslant 10$

∴当$0<a\leqslant 10$时，方程$x^2-2x+\text{Lg}a=0$有实教根

3．解方程：$7^{(2x^2+x-6)}=1$

解：$7^{(2x^2+x-6)}=1$　可化为　$7^{(2x^2+x-6)}=7^{\circ}$　所以$2x^2+x-6=0$

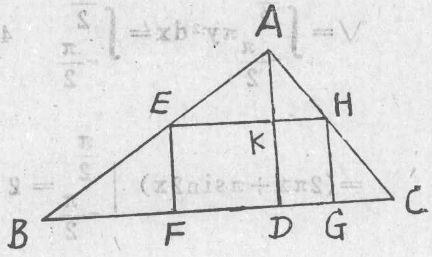
解此方程得到　　$x_1=1\frac{1}{2}$，　$x_2=-2$

4．求等比数列$\sqrt[6]{3}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt{3}$，……的公比q，并写出它的第六项a_6

解：$q=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{3}}=\frac{\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[6]{3}}=\sqrt[6]{3}$

$a_6=a_1q^5=\sqrt[6]{3}\cdot(\sqrt[6]{3})^5=3$

二、在底边为 2 尺，高为1.6尺的三角形内截一个最大面积的矩形，并使其一边在三角形的底边上，求矩形的长和宽各是多少？(16分)



解：如图，矩形的一边FG在△ABC的BC边上，因此EH ∥ BC

从而有　　△AEH∽△ABC

$\therefore \dfrac{EH}{BC}=\dfrac{AK}{AD}$

现设矩形的长EH＝x尺，则 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{AK}{1.6}$　　$AK=0.8x$

那末矩形的宽　$HG=KD=1.6-0.8x$

因此矩形面积　$S=x(1.6-0.8x)=-0.8x^2+1.6x$

$=-0.8(x-1)^2+0.8$

所以当 $x=1$ 时，函数 $S=-0.8x^2+1.6x$ 有极大值。此时

$HG=KD=1.6-0.8\times 1=0.8$

答：当矩形的长为 1 尺，宽为0.8尺时，所截矩形面积最大

三、计算：

1．求ctg(－1200°)的值。(6分)

解：$\operatorname{ctg}(-1200^\circ)=-\operatorname{ctg}(+1200^\circ)=-\operatorname{ctg}(360^\circ\times 3+120^\circ)$

$=-\operatorname{ctg}120^\circ=-\operatorname{ctg}(180^\circ-60^\circ)=\operatorname{ctg}60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2．已知　$\sin\alpha=-\dfrac{12}{13}$，并且 $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，　　求 $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

解：$\because \pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，$\therefore \dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4}$，$\cos\alpha$ 和 $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 都是负值，

则 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

而 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2}=-\dfrac{5}{13}$

因此 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1-\frac{5}{13}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

四、三角形的三边长分别是4cm，5cm，$\sqrt{61}$cm，求这个三角形内最大角的度数(12分)

解：在一个三角形内，三内角中最长边所对的角最大。因此这个三角形内边长为 $\sqrt{61}$cm的边所对的角最大

设 $\sqrt{61}$cm的这条边所对的角为α，由余弦定理得

$$\cos\alpha=-\frac{-(\sqrt{61})^2+4^2+5^2}{2\times4\times5}=\frac{-61+16+25}{40}=-\frac{1}{2}$$

故$\alpha=120^\circ$

答：这个三角形内最大的角是120°

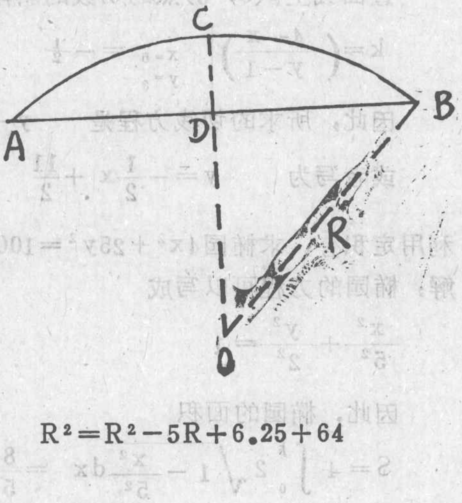
五、求经过园$2x^2-20x+2y^2+18=0$上一点$p(3,\ 2\sqrt{3})$的切线方程.（18分）

解：因为$p(3,2\sqrt{3})$是园$2x^2-20x+2y^2+18=0$上一点，所以过p点园的切线方程为：

$$2(3x)-20\left(\frac{3+x}{2}\right)+2(2\sqrt{3}y)+18=0$$

化简后得　$\sqrt{3}y-x-3=0$

六、园弧拱桥的拱坡跨径AB＝16米，主拱高为2.5米，计算$\overset{\frown}{AB}$的半径是多少米？（14分）



解：如图，是园弧拱桥。跨径AB是园弧$\overset{\frown}{AB}$之弦，主拱CD⊥AB，并且主拱CD延长通过$\overset{\frown}{AB}$的园心。故CD平分AB（垂直于弦的直径平分这条弦）.即得　$AD=DB=\frac{1}{2}AB=8$

设$\overset{\frown}{AB}$的半径为R，园心为O，则OB＝R

$OD=R-CD=R-2.5$

由勾股定理得　$R^2=(R-2.5)^2+8^2$　　$R^2=R^2-5R+6.25+64$

$5R=70.25$　　$\therefore R=14.05$（米）

答AB的半径是14.05米

参考题

一、解方程：$\mathrm{Log}_{16-3x}(x-2)=\mathrm{Log}_8 2\sqrt{2}$

解：$\mathrm{Log}_{16-3x}(x-2)=\mathrm{Log}_8 2\sqrt{2}$　　$\mathrm{Log}_{16-3x}(x-2)=\mathrm{Log}_8 8^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

根据对数定义，有$(16-3x)^{\frac{1}{2}}=x-2$

两边平方　$16-3x=x^2-4x+4$　即$x^2-x-12=0$，　$(x-4)(x+3)=0$

解得　$x_1=4$，　$x_2=-3$（是增根，舍去）　∴原方程的解是$x=4$

二、已知$0^\circ<x<45^\circ$，且有$\mathrm{Lg}\,\mathrm{tg}x-\mathrm{Lg}\sin x=\mathrm{Lg}\cos x-\mathrm{Lg}\,\mathrm{ctg}x+2\mathrm{Lg}3-\frac{3}{2}\mathrm{Lg}2$，试求　$\sin x-\cos x$的值，

解：利用对数的性质，已知等式可变换成

$$\mathrm{Lg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sin x}=\mathrm{Lg}\frac{\cos x\cdot3^2}{\mathrm{ctg}x\cdot2^{\frac{3}{2}}}\qquad \mathrm{Lg}\frac{1}{\cos x}=\mathrm{Lg}\frac{9\sin x}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\frac{1}{\cos x}=\frac{9\sin x}{2\sqrt{2}}\qquad \sin x\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

因为 $0^\circ < x < 45^\circ$，　所以 $\sin x < \cos x$，　也就是 $\sin x - \cos x < 0$，

因此　$\sin x - \cos x = -\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = -\sqrt{1 - 2\sin x\cos x}$

$$= -\sqrt{1 - 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{9}} = -\frac{\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}{3} = -\frac{2\sqrt{2} - 1}{3} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{3}.$$

三、应用导数，求过曲线 $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ 上一点 $p(5, 3)$ 的切线方程，

解：对曲线方程 $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ 两边求导：

$$2x + 2yy' - 8 - 2y' = 0$$

解出 $y' = \frac{4 - x}{y - 1}$

过曲线上 $p(5, 3)$ 点的切线的斜率

$$k = \left(\frac{4 - x}{y - 1}\right)\Bigg|_{\substack{x=5 \\ y=3}} = -\frac{1}{2}$$

因此，所求的切线方程是　$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 5)$

或者写为　$y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

四、利用定积分，求椭园 $4x^2 + 25y^2 = 100$ 的面积

解：椭园的方程可以写成

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

因此，椭园的面积

$$S = 4\int_0^5 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{5^2}}dx = \frac{8}{5}\int_0^5\sqrt{5^2 - x^2}dx$$

$$= \frac{4}{5}\left(x\sqrt{5^2 - x^2} + 5^2\arcsin\frac{x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = 10\pi$$

答：椭园 $4x^2 + 25y^2 = 100$ 的面积是 10π