河南1977年高考数学试题解

一、化简下式（7分）

$$(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}-\left\{[(1+c)(1-c)]^{\frac{1}{2}}+c^2[(1+c)(1-c)]^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

解：原式 $=(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}-\left\{(1-c^2)^{\frac{1}{2}}+c^2(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}$

$$=(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}-(1-c^2)^{\frac{1}{2}}-c^2(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}[1-(1-c^2)-c^2]=0$$

二、求 $\dfrac{Lg3+Lg2}{\frac{1}{4}Lg16+\sqrt{(Lg1-Lg10)^2}+\frac{1}{2}Lg0.09}$ 的值　　（7分）

解：原式 $=\dfrac{Lg3+Lg2}{Lg2+\sqrt{(0-1)^2}+Lg0.3}=\dfrac{Lg3+Lg2}{Lg2+1+Lg3-Lg10}$

$=\dfrac{Lg3+Lg2}{Lg2+1+Lg3-1}=1$

三、求等式 $5^{x^2-2x}=125$ 中x的值　　（7分）

解：

$$5^{x^2-2x}=5^3$$

$\therefore\quad x^2-2x=3$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\quad x_1=3,\ x_2=-1$

四、已知a、b、c分别表示△ABC的角A、B、C对边的长

求证：$a(\sin B-\sin c)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$

证明：由正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

可知

$a\sin B=b\sin A,\ a\sin c=c\sin A,\ b\sin C=c\sin B$

因此

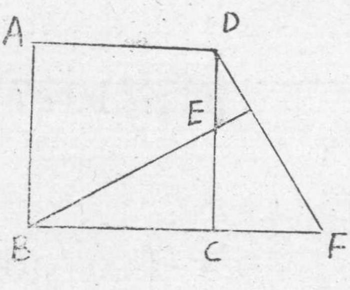
$a(\sin B-\sin c)+b(\sin c-\sin A)+c(\sin A-\sin B)$

$=a\sin B-a\sin C+b\sin C-b\sin A+c\sin A-c\sin B$

$=b\sin A-c\sin A+c\sin B-b\sin A+c in A-c\sin B$

$=0$

五、如图，已知正方形ABCD的边CD上任意一点E，延长BC到F，使CF＝CE，设BE与DF相交于G，求证BG⊥DF（8分）



证明：在Rt△BCE和Rt△DCF中，

∵BC＝CD　（正方形的边长相等）

CE＝CF　（已知）

∴△BCE≅△DCF

∴∠GBC＝∠FDC　（对应角相等）

因∠EBC＋∠BEC＝90°，而∠BEC＝∠DEG(对顶角相等)

∴∠FDC＋∠DEG＝90°

∴∠DGB＝90°

即　　BG⊥DF

六、求证：$tg^2\alpha-ctg^2\alpha=-\dfrac{2\sin4\alpha}{\sin^3 2\alpha}$　　(10分)

证明：

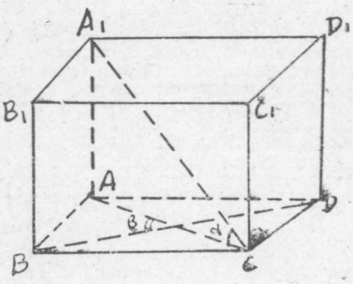
$$左边=tg^2\alpha-ctg^2\alpha=\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{-\cos2\alpha}{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}$$

$$=\frac{-4\cos2\alpha\cdot\sin2\alpha}{\sin^2 2\alpha\cdot\sin2\alpha}=-\frac{2\sin4\alpha}{\sin^3 2\alpha}=右边$$

$$\therefore tg^2\alpha-ctg^2\alpha=-\frac{2\sin4\alpha}{\sin^3 2\alpha}$$

七、已知长方体的对角线长为L，它与底面所成的角为α，底面两条对角线的夹角为β，求长方体的体积　(10分)



解：$AA_1=L\sin\alpha$

$AC=L\cos\alpha$

∴底面矩形ABCD的面积为

$S=\frac{1}{2}AC^2\sin\beta=\frac{1}{2}L^2\cos^2\alpha\sin\beta$

∴长方体的体积

$V=AA_1\times S=L\sin\alpha\frac{1}{2}L^2\cos^2\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}L^3\cos^2\alpha\sin\alpha\sin\beta$

八、某工厂科研小组，对一项生产工艺过程总结出产量指标函数和消耗函数为：

$$f_1(x)=a_1x^2+\frac{1}{2}x+c \text{ 和 } f_2(x)=a_2x^2+bx+\frac{5}{4}\ (※)$$

且知$f_1(-1)=f_2(-1)=f_1(3)=f_2(3)=2$

(1)分别求出产量指标函数$f_1(x)$和消耗函数$f_2(x)$的具体表达式；

(2)问因素x取何值时，$f_1(x)$和$f_2(x)$有最大值或最小值？最大值或最小值各是多少？

(3)画出所求出函数的略图　　(14分)

解：(1)对指标函数$f_1(x)$来说，由$f_1(-1)=f_1(3)=2$，可得

$$\begin{cases} a_1-\frac{1}{2}+C=2 \\ 9a_1+\frac{3}{2}+C=2 \end{cases}$$

解这个方程组，得$a_1=-\frac{1}{4}$，$C=\frac{11}{4}$

$$\therefore\ f_1(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}$$

对消耗函数$f_2(x)$来说，由$f_2(-1)=f_2(3)=2$，可得

$$\begin{cases} a_2-b+\frac{5}{4}=2 \\ 9a_2+3b+\frac{5}{4}=2 \end{cases}$$

解这个方程组，得 $a_2=\frac{1}{4}$，$b=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad f_2(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$$

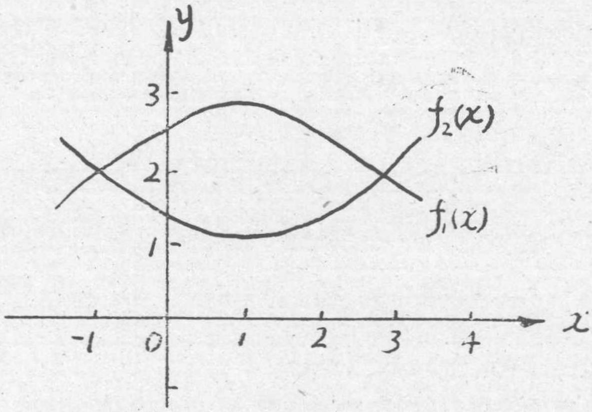
（2） 因为

$$f_1(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}=-\frac{1}{4}(x-1)^2+3$$

$$f_2(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}(x-1)^2+1$$

所以指标函数$f_1(x)$在$x=1$时有极大值3，消耗函数$f_2(x)$在$x=1$时有极小值1。

（3）略图如下：



(※)原题中$a_1=a_2=a$，问题无解，我们酌情把$f_1(x)$和$f_2(x)$中的二次项系数分别改为a_1和a_2

九、已知过点$P(0,3\sqrt{2})$且斜率为K的直线与园心在原点，半径为3的园相交于M、N两点

（1）求M、N的坐标；

（3）问当M、N两点重合时，K为何值？过P点的直线与园的位置关系如何？这样的直线有几条？它们的夹角是多大？　（14分）

解：（1）过点$P(0,3\sqrt{2})$，且斜率为K的直线方程是

$$y-3\sqrt{2}=kx$$

园心在原点、半径为3的园的方程是

$$x^2+y^2=9$$

它们的交点坐标(x、y)应适合方程组：

$$\begin{cases} y-3\sqrt{2}=kx \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$

解此方程组，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{-3\sqrt{2}k\pm3\sqrt{k^2-1}}{1+k^2} \\ y=\dfrac{3\sqrt{2}\pm3k\sqrt{k^2-1}}{1+k^2} \end{cases}$$

即交点M、N的坐标是

$$\left(\frac{-3\sqrt{2}k+3\sqrt{k^2-1}}{1+k^2},\ \frac{3\sqrt{2}+3k\sqrt{k^2-1}}{1+k^2}\right),$$

$$\left(\frac{-3\sqrt{2}k-3\sqrt{k^2-1}}{1+k^2},\ \frac{3\sqrt{2}-3k\sqrt{k^2-1}}{1+k^2}\right)$$

(2)当M、N两点重合时，这时

$$k^2-1=0,\ k=\pm1$$

这时过P点的直线和园相切。这样的直线有两条：

$$y=x+3\sqrt{2} \text{ 和 } y=-x+3\sqrt{2}$$

这两条与园相切的直线的斜率互为负倒数，表示这两条直线垂直，因此这两条切线的夹角为90°

十、某电管所为实现农业现代化，加强电力网的建设，沿着一条通往农村的新公路栽电杆，已知一辆汽车每次从电管所运3根电线杆，相邻两根电线杆相距50米，汽车往返的总行程是35.5公里，最后一根电线杆与电管所相距2450米

(1)第一根电线杆与电管所相距多少？

(2)共栽了多少根电线杆？

解：设第一根电线杆离电管站为x米，共运电线杆 n 根，汽车共走了$\frac{n}{3}$趟，第一趟走的路程是2(x＋100)米，以后每一趟都比前一趟多走300米，最后一趟所走的路程是2×2450米，因此，根据题意，得

$$\begin{cases} 2450=x+(n-1)50 \\ 3500=\dfrac{\frac{n}{3}\left[2(x+100)+2\times2450\right]}{2} \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} n_1=30 \\ x_1=1000 \end{cases} \qquad \begin{cases} n_2=71 \\ x_2=-1050 \end{cases} \qquad \text{（不合题意，舍去）}$$

答：(1)第一根电线杆与电管所相距1000米；(2)共栽了30根电线杆

参考题

1. (20分) 已知 $x+x^{-1}=2\cos\theta$，求证$x^n+x^{-n}=2\cos n\theta$

证明：由 $x+x^{-1}=2\cos\theta$可得

$$x^2-2\cos\theta x+1=0$$

$$\therefore x=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

因此

$$\begin{aligned}x^n+x^{-n}&=(\cos\theta\pm i\sin\theta)^n+(\cos\theta\pm i\sin\theta)^{-n}\\&=\cos n\theta\pm i\sin\theta+\cos(-n\theta)\pm i\sin(-n\theta)\\&=\cos n\theta\pm i\sin n\theta+\cos n\theta\mp i\sin n\theta\\&=2\cos n\theta\end{aligned}$$

2.（1）设 $y=\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2-a^2})$，求y的导数y′

$$解：y'=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-a^2}$$

（2）求$\int_0^{2p}\sqrt{2px}dx$的值

$$解：\int_0^{2p}\sqrt{2px}\,dx=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\sqrt{2px}\,d(2px)$$

$$=\frac{1}{3p}(2px)^{3/2}\Big|_0^{2p}=\frac{8}{3}p^2$$