浙江1977年高考数学试题解

一、计算：

1．$\sqrt[6]{8^{5}} \div \sqrt{8} \times \sqrt[3]{8} \div \left(\frac{1}{8}\right)^{\circ}$　（本题5分）

解：原式$=\sqrt[6]{2^{15}} \div \sqrt{2^{3}} \times \sqrt[3]{2^{3}} \div 1 = 4\sqrt{2} \div 2\sqrt{2} \times 2 \div 1 = 4$

2．$\dfrac{\mathrm{Lg}4+\mathrm{Lg}25-\mathrm{Lg}10}{\mathrm{Lg}\sqrt{1000}}$　（本题5分）

解：原式$=\dfrac{\mathrm{Lg}\dfrac{4\times 25}{10}}{\mathrm{Lg}\,10^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\mathrm{Lg}10}{\dfrac{3}{2}\mathrm{Lg}10}=\dfrac{2}{3}$

3．$\dfrac{1}{100\times 101}+\dfrac{1}{101\times 102}+\dfrac{1}{102\times 103}+\cdots+\dfrac{1}{149\times 150}$　（本题5分）

解：原式$=\left(\dfrac{1}{100}-\dfrac{1}{101}\right)+\left(\dfrac{1}{101}-\dfrac{1}{102}\right)+\left(\dfrac{1}{102}-\dfrac{1}{103}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{149}-\dfrac{1}{150}\right)$

$=\dfrac{1}{100}-\dfrac{1}{150}=\dfrac{1}{300}$

二、

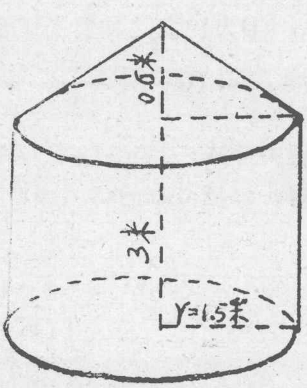
1．已知 $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{2}$，求$\dfrac{\mathrm{Cos}\alpha+\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha-\mathrm{Sin}\alpha}$的值　（本题5分）

解：$\dfrac{\mathrm{Cos}\alpha+\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha-\mathrm{Sin}\alpha}=\dfrac{\mathrm{Cos}\alpha\left(1+\dfrac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha}\right)}{\mathrm{Cos}\alpha\left(1-\dfrac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha}\right)}=\dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-3-2\sqrt{2}$

2．求$\mathrm{Sin}^{2}62^{\circ}+\mathrm{tg}54^{\circ}\cdot\mathrm{tg}45^{\circ}\cdot\mathrm{tg}36^{\circ}+\mathrm{Sin}^{2}28^{\circ}$的值　（本题5分）

解：原式$=\mathrm{Sin}^{2}62^{\circ}+\mathrm{Cos}^{2}62^{\circ}+\mathrm{tg}54^{\circ}\cdot\mathrm{tg}45^{\circ}\cdot\mathrm{ctg}54^{\circ}=1+1=2$

3．某生产队要建一个贮粮用的“土圆仓”，如果土圆仓下部圆柱和上部圆锥的底面半径都是1.5米，高分别是3米和0.6米，计算它的容积（$\pi\approx 3.14$，精确到0.1立方米）（本题8分）



解：若以h_1、h_2分别表示圆柱的高和上面圆锥的高。则“粮仓”的容积

$V=V_{\text{圆柱}}+V_{\text{圆锥}}=\pi r^{2}h_{1}+\frac{1}{3}\pi r^{2}h_{2}$

$=\pi r^{2}(h_{1}+\frac{1}{3}h_{2})$

$=3.14\times 1.5^{2}(3+\frac{1}{3}\times 0.6)$

≈ 22.6（立方米）

答："土圆仓"的容积约为22.6立方米

三、求平行直线$3x+2y-3=0$和$3x+2y+2=0$之间的距离（本题15分）

解：点P(1，0)是直线$3x+2y-3=0$上的点

点P到直线$3x+2y+2=0$的距离为

$$d=\frac{|3\times1+2\times0+2|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$$

因为这两条直线平行，所求得的$d=\frac{5\sqrt{13}}{13}$就是这两条平行直线间的距离

答：直线$3x+2y-3=0$和$3x+2y+2=0$之间 的 距离为$\frac{5\sqrt{13}}{13}$

四、已知α和β是三角形的两个内角，并且α是锐角，而$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{3}{5}$，$\mathrm{Sin}\beta=\frac{5}{13}$，

求$\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)$的值　（本题15分）

解：$\because$ α为锐角，且$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{3}{5}$，$\therefore \mathrm{Sin}\alpha=\frac{4}{5}$

$\because \mathrm{Sin}\beta=\frac{5}{13}$，β可能是锐角，也可能是纯角，$\therefore \mathrm{Cos}\beta=\pm\frac{12}{13}$

(1)β为锐角时，$\mathrm{Cos}\beta=\frac{12}{13}$

$$\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)=\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\beta+\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{63}{65}$$

(2)β为钝角时，$\mathrm{Cos}\beta=-\frac{12}{13}$

$$\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)=\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\beta+\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}\beta=\frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{33}{65}$$

因为α、β是三角形两内角，$0^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$，$\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)$不可能是负值。所以β为钝角这种情况应舍去

故　$\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)=\frac{63}{65}$

五、解不等式：$\mathrm{Log}_5(x^2-2x-15)<\mathrm{Log}_5(x+13)$（本题15分）

解：根据对数的定义和性质，要使原不等式成立，x必须同时满足下列不等式：

$$\begin{cases}x^2-2x-15<x+13\\x^2-2x-15>0\\x+13>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+4)(x-7)<0\\(x+3)(x-5)>0\\x>-13\end{cases}$$

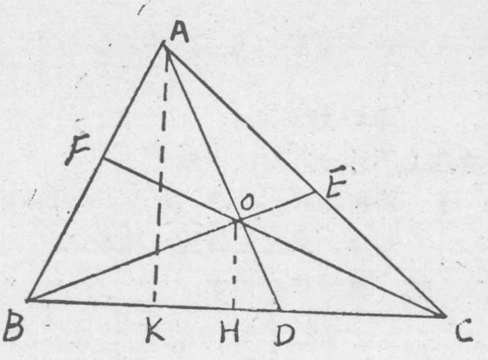
$$\begin{cases} -4<x<7 \\ x>5 \text{或者 } x<-3 \\ x>-13 \end{cases}$$

所以原不等式的解为：$5<x<7$和$-4<x<-3$

六、点O为△ABC内任意一点，连接AO并延长交BC于点D，连接BO并延长交AC于点E，连接CO并延长交AB于点F，则

$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$$

（本题10分）



证明：作△ABC和△OBC的高AK和OH　∴Rt△AKD∽Rt△OHD

$$\therefore \frac{OH}{AK}=\frac{OD}{AD}$$

$$\therefore \frac{\triangle OBC\text{面积}}{\triangle ABC\text{面积}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot OH}{\frac{1}{2}BC\cdot AK}=\frac{OH}{AK}=\frac{OD}{AD}$$

同理，有

$$\frac{\triangle OAC\text{的面积}}{\triangle ABC\text{的面积}}=\frac{OE}{BE}$$

$$\frac{\triangle OAB\text{的面积}}{\triangle ABC\text{的面积}}=\frac{OF}{CF}$$

所以

$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=\frac{\triangle OBC\text{的面积}+\triangle OAC\text{的面积}+\triangle OAB\text{的面积}}{\triangle ABC\text{的面积}}$$

$$=\frac{\triangle ABC\text{的面积}}{\triangle ABC\text{的面积}}=1$$

即　$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$$

七。设x、y、z为三个互不相等的实数，且

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$$

求证：$x^2y^2z^2=1$　　　（本题12分）

证明：由$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$，得　$x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}$，即

$$yz=\frac{y-z}{x-y}$$

同理可得

$$xy = \frac{x-y}{z-x}$$

$$zx = \frac{z-x}{y-z}$$

$$\therefore yz \cdot xy \cdot zx = \frac{y-z}{x-y} \cdot \frac{x-y}{z-x} \cdot \frac{z-x}{y-z} = 1$$

即$x^2y^2z^2 = 1$

参考题（不计分，可以不做）

1．将抛物线$y=x^2$，直线$x=2$与x轴围成的曲边三角形，绕x轴旋转一周形成一个旋转体，求此旋转体的体积

解：旋转体的体积

$$V = \int_0^2 \pi y^2 dx = \int_0^2 \pi x^4 dx = \left.\frac{\pi x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$

2．求不定积分

$$\int \frac{6x^2+22x+18}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$$

解：$\displaystyle\int \frac{6x^2+22x+18}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} \right) dx$

$$= \mathrm{Ln}\left|x+1\right| + 2\,\mathrm{Ln}\left|x+2\right| + 3\,\mathrm{Ln}\left|x+3\right| + C$$

$$= \mathrm{Ln}\left|(x+1)(x+2)^2(x+3)^2\right| + C$$

其中C是任意常数