湖北1977年高考数学试题解

一、计算（共8题，每小题5分，共40分）

(1) $\sqrt{(-3)^2}$；$\sqrt[3]{(-27)^3}$

解：$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{3^2}=3$

$\sqrt[3]{(-27)^3}=-27$

(2) $\log_2 2+\log_5 1-\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{27})$

解：$\mathrm{Log}_2 2+\mathrm{Log}_5 1-\mathrm{Log}_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{27})=1+0-\mathrm{Log}_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^3$

$$=1+0-3\operatorname{Log}_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1-3=-2.$$

(3) $\left(\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)}\right)^3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$

解：$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$

$$=\sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^9}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{3}{2}\right)^5}$$

$$=\sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^9}=1.$$

(4)解方程：$x-\sqrt{8-x^2}=0$.

解：移项 $x=\sqrt{8-x^2}$

两边平方 $x^2=8-x^2$

$x^2=4$

$\therefore x=\pm2.$

经验根，知$x=-2$不适合原方程，是增根舍去.

故原方程的解为 $x=2$.

(5)当$m\leqslant1$时，计算$\sqrt{(m-1)^2}$.

解：$\because m\leqslant1$，$\therefore m-1\leqslant0$，故

$$\sqrt{(m-1)^2}=1-m.$$

(6)求函数 $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x+4}$的定义域·

解：要使函数 $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x+4}$有意义，自变量x必须满足下面的不等式：

$$\begin{cases}2-x\geqslant0\\ x+4\neq0\end{cases}$$

解之，得$-4<x\leqslant2$ 和 $x<-4$.

因此，函数的定义域为 $-4<x\leqslant2$和$x<-4$的实数·（也可表示为$x\leqslant2$但$x\neq-4$的实数）

(7)分解因式：$x^4+x^2y^2+y^4$.

解：在有理式范围内可作如下因式分解：

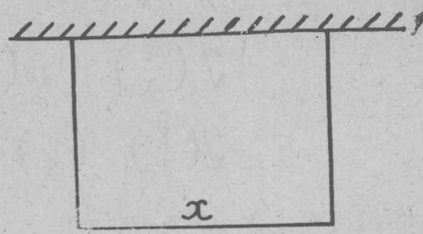
$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$$

(8)证明：$\operatorname{tg}22°30'=\sqrt{2}-1$· （不查表），

〔证〕. $\operatorname{tg}22°30'=\operatorname{tg}\dfrac{45°}{2}=\dfrac{1-\cos45°}{\sin45°}$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2}=\sqrt{2}-1.$$

二、围一矩形场地，一边利用房屋的墙，其他三边用L米的篱笆围成，问怎样围才能使面积最大？最大面积是多少？（10分）.



解：如图，设围成的矩形场地的长为 x米．那么宽就应是$\frac{L-x}{2}$米

这时矩形面积

$$S=x\left(\frac{L-x}{2}\right)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{L}{2}x.$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+\frac{L^2}{8}$$

所以当 $x=\frac{L}{2}$（米）时，S有最大值 $\frac{L^2}{8}$（米^2）．这时的宽$\frac{L-x}{2}=\frac{L}{4}$（米）．

答：当与墙平行的一边长为$\frac{L}{2}$米，与墙垂直的两边分别长为$\frac{L}{4}$米时，围成的矩形面积最大．最大面积为$\frac{L^2}{8}$米^2．

三、已知直线L_1方程为$x+y-1=0$和点A（$-3,0$）

（1）求与直线L_1垂直且通过A的直线方程；

（2）求点A到直线L_1的距离。　　　　（10分）

解：（1）直线L_1的斜率为-1，因此和L_1垂直的直线的斜率为1．根据点斜式，所求的直线方程为　$\frac{y-0}{x+3}=1$

或者写成：：$x-y+3=0$.

（2）点A到直线L_1的距离　　$d=\frac{|-3+0-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

四、解方程组：$\begin{cases}\mathrm{Log}_2x-\mathrm{Log}_4y=0\\ y^2-13x^2+36=0.\end{cases}$　　　　（20分）

解：原方程组可写成：

$$\begin{cases}\mathrm{Log}_2x-\frac{1}{2}\mathrm{Log}_2y=0\\ y^2-13x^2+36=0\end{cases}.$$

$$\begin{cases}x=\sqrt{y} & (1)\\ y^2-13x^2+36=0 & (2)\end{cases}$$

把（1）代入（2），得

$$y^2-13y+36=0.$$
$$(y-9)(y-4)=0$$
$$\therefore\quad y_1=9,\ y_2=4.$$

把$y_1=9, y_2=4$分别代入(1)式，求得$x_1=3$，$x_2=2$. 经检验，都是原方程的根. 所以原方程的解为

$$\begin{cases}x_1=3\\ y_1=9\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}x_2=2\\ y_2=4.\end{cases}$$

五、作函数 $y=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x$的图象，（要求写出作图步骤，并画出草图，20分）.

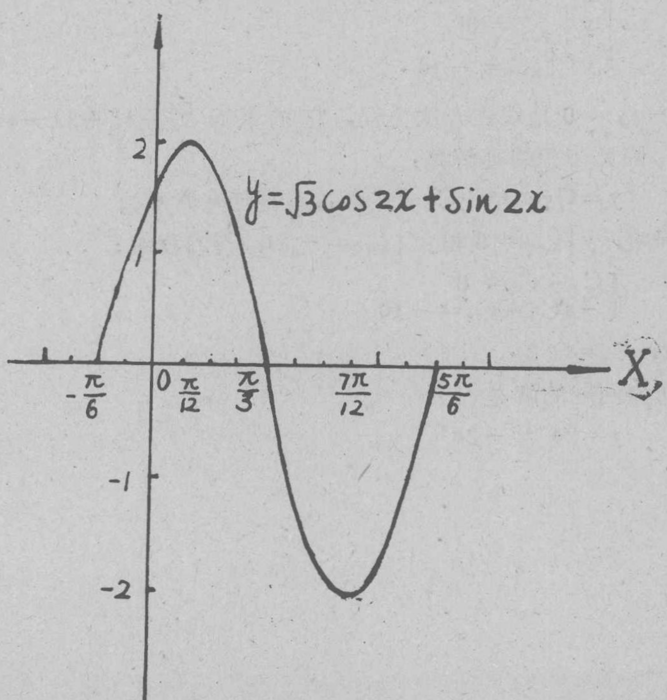
解：$y=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

所以这个函数的周期为π，振幅为2.

x	$\cdots-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}\cdots$
y	$\cdots\cdots 0$	2	0	-2	$0\cdots$

函数图象（一个周期）的草图如下：



参考题：（不计入考分，只供录取后参考）

1．求下列函数的导数：

$y=\sin x$；$y=e^{3x}$；$y=\mathrm{Ln}x$，$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$·

解：$y=\sin x$，则$y'=\cos x$.

$y=e^{3x}$，则$y'=3e^{3x}$.

$y=\mathrm{Ln}x$，则$y'=\frac{1}{x}$.

$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$，则$f'(t)=\omega A\cos(\omega t+\varphi)$.

2．设函数$f(x)=x^3-12x+10$.

（1）求$f(x)$的极值点；

（2）求$f(1)$，$f(2)$，$f(-3)$.

解：（1）在极值点，必定$f'(x)=0$.

即$f'(x)=3x^2-12=0$.

解得$x=\pm2$．这时$f(2)=-6$，$f(-2)=26$.

所以函数$f(x)=x^3-12+10$的极值点为$(2,-6)$和$(-2,26)$.

（2） $f(1)=1-12+10=-1$

$f(2)=2^3-12\times2+10=-6$

$f(-3)==(-3)^3-12\times(-3)+10=19$.

3．解方程：

$$\begin{cases} y''+3y'-4y=0 \\ y\big|_{x=o}=0 \\ y'\big|_{x=o}=-10 \end{cases}$$

解：$y''+3y'-4y=0$是线性齐次方程，它的特证方程$\lambda^2+3\lambda-4=0$的根是-4和1．因此方程的通解是：

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^x.\ (c_1,c_2\text{是任意常数}),$$

代入初值问题，$y|_{x=o}=0$和$y'|_{x=o}=-10$，得方程组：

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ -4C_1+C_2=-10 \end{cases}$$

求得$C_1=2$，$C_2=-2$·

故得初值问题的解是

$$y=2e^{-4x}-2e^x$$