湖南1977年高考数学试题解

理科考生七大题全作；文科考生1—5大题必作，6、7两大题选作一个。

1．（理科每小题5分，6小题共30分；文科每小题6分，6小题共36分）

(1)　$\log_x 3\frac{3}{8}=-1\frac{1}{2}$，求x=?

解：由对数定义得　$x^{-\frac{3}{2}}=\frac{27}{8}$　即　$(x^{\frac{1}{2}})^{-3}=(\frac{2}{3})^{-3}$

$\therefore\ x^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$　$x=\frac{4}{9}$

(2)　$\lg4+\lg9+2\sqrt{(\mathrm{Lg}6)^2-2\mathrm{Lg}6+1}=?$

解：$\mathrm{Lg}4+\mathrm{Lg}9+2\sqrt{(\mathrm{Lg}6)^2-2\mathrm{Lg}6+1}=\mathrm{Lg}4+\mathrm{Lg}9+2\sqrt{(\mathrm{Lg}6-1)^2}$

$=\mathrm{Lg}4+\mathrm{Lg}9+2(1-\mathrm{Lg}6)=\mathrm{Lg}36+2-\mathrm{Lg}6^2=2$

(3)　求函数 $y=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}$的定义域（即自变量x的取值范围）

解：要使函数 $y=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}$有意义，自变量x必须满足不等式组：$\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$

解之，得　$2<x\leqslant 3$

$\therefore$函数 $y=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}$的定义域是：　$2<x\leqslant 3$

(4)　解不等式：　$x^2-3x-28<0$

解：　$(x-7)(x+4)<0$

$\therefore$（Ⅰ）$\begin{cases}x-7>0\\ x+4<0\end{cases}$　或者　（Ⅱ）$\begin{cases}x-7<0\\ x+4>0\end{cases}$

不等式组（Ⅰ）无解，不等式组（Ⅱ）的解是　$-4<x<7$

所以原不等式的解是　$-4<x<7$

(5)　证明　$\cos15^\circ+\sin15^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}$

〔证〕证法一、$(\cos15^\circ+\sin15^\circ)^2=\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ+2\sin15^\circ\cos15^\circ$

$=1+\sin30^\circ=\frac{3}{2}$

因$\cos15^\circ+\sin15^\circ>0$，所以

$\cos15^\circ+\sin15^\circ=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

证法二：$\cos 15^\circ + \sin 15^\circ = \sin 75^\circ + \sin 15^\circ$

$$= 2\sin\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}$$

$$= 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(6)　求中心在原点，焦点在x轴上，且经过$A(5,0)$，$B(4,\frac{12}{5})$两点的椭园方程

解：因为椭园的中心在原点，焦点在x轴上，可设所求的椭园方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

其中a为长半轴，b为短半轴.

已知椭园过(5,0)点，因而可求得$a = 5$，又知椭园还过点$(4, \frac{12}{5})$，所以

此点的坐标应满足方程　$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，即　$\frac{4^2}{25} + \frac{\left(\frac{12}{5}\right)^2}{b^2} = 1$

求得$b = 4$。所以所求的椭园方程是 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

2.（理科10分，文科12分）某县农机厂金工车间共有86个工人，已知每个工人平均每天可以加工甲种部件15个，或者乙种部件12个，或者丙种部件9个。问应安排加工甲种部件、乙种部件和丙种部件各多少人，才能使加工后的3个甲种部件、2个乙种部件和1个丙种部件恰好配套（即加工后的甲种部件个数是丙种部件个数的3倍，乙种部件个数是丙种部件数的2倍）

解：设安排加工甲种部件的有x人，加工乙种部件的有y人，加工丙种部件的有z人，依题意，得到下面方程组：

$$\begin{cases} x + y + z = 86 \\ 15x = 3 \times 9z \\ 12y = 2 \times 9z \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x + y + z = 86 & (1) \\ 5x - 9z = 0 & (2) \\ 2y - 3z = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \times 2 - (3)$，得　$2x + 5z = 172$　(4)

$(4) \times 5 - (2) \times 2$，得　$43z = 172 \times 5$　$\therefore z = 20$

把$z = 20$代入(3)得　$y = 30$

把$y = 30$，$z = 20$代入(1)，得　$x = 36$

即方程组(1)、(2)、(3)的解是 $\begin{cases} x = 36 \\ y = 30 \\ z = 20 \end{cases}$

答：加工甲种部件安排36人，加工乙种部件安排30人，加工丙种部件安排20人。

3．（理科10分；文科12分）

已知方程　$ax^2-(2a+1)x+(a+1)=0$

（1）有一个根为 0 ；　（2）两个根的和为 0 ；　（3）两个根的乘积为2，　分别求a的值．

解：（1）因为 0 是方程的一个根，所以 $x=0$ 代入方程应成立；得

$$a+1=0 \qquad \therefore a=-1$$

（2）设方程的两个根为 x_1、x_2。已知两根和为 0，根据韦达定理，

$$x_1+x_2=\frac{2a+1}{a}=0, \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

（3）已知两根的积为2，即

$$x_1x_2=\frac{a+1}{a}=2 \qquad \therefore a=1$$

4．（理科10分；文科13分）

把表面积分别是36π平方厘米、64π平方厘米和100π平方厘米的三个锡球熔成一个大锡球，求这个大锡球的半径．

解：设大锡球的半径为R，三个小锡球的半径分别为 r_1，r_2，r_3，则

$$r_1=\sqrt{\frac{36\pi}{4\pi}}=\sqrt{9}=3, \qquad r_2=\sqrt{\frac{64\pi}{4\pi}}=\sqrt{16}=4,$$

$$r_3=\sqrt{\frac{100\pi}{4\pi}}=\sqrt{25}=5$$

三个小锡球熔成一个大锡球，那末三个小锡球的体积和应等于大锡球的体积，

即　$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(r_1{}^3+r_2{}^3+r_3{}^3)$

$\therefore$　$R=\sqrt[3]{r_1{}^3+r_2{}^3+r_3{}^3}=\sqrt[3]{3^3+4^3+5^3}=6$（厘米）

答：这个大锡球的半径应为 6 厘米

5．（理科10分；文科12分）已知四边形ABCD中，∠A、∠B、∠C、∠D成等差数列，且∠C=3∠A，求∠A、∠B、∠C ，∠D的度数

解，设∠A、∠B、∠C、∠D的度数分别为x，$x+d$，$x+2d$，$x+3d$.（d为公差）.

由已知∠C=3∠A，　则　$x+2d=3x$，$d=x$，因此，∠A、∠B、∠C、∠D的度数分别为x，2x，3x，4x。

因为四边形的四个内角和等于360°，所以　$x+2x+3x+4d=360°$

$\therefore x=36°$

因此，∠A=x=36°，　∠B=2x=72°，

∠C=3x=108°，　∠D=4x=144°

答：∠A是36°，∠是72°，∠C是108°，∠C是144°、

6．(15分)在△ABC中，用a、b、c依次表示∠A，∠B、∠C的对边，已知B＝45°，b＝10，c＝$5\sqrt{6}$，不查表求C、A、a

解：由正弦定理得

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{5\sqrt{6}\sin 45^\circ}{10}=\frac{5\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因此∠C＝60°或者∠C＝120°

(i)若∠C＝60°　∠A＝180°－(45°＋60°)＝75°，

$$\therefore a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{10\times\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{10\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5(\sqrt{3}+1)$$

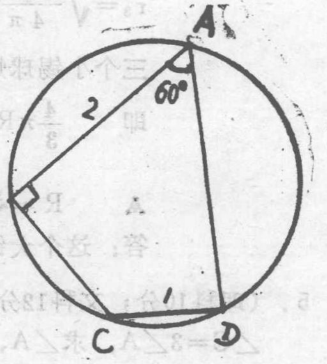
(ii)若∠C＝120°

∠A＝180°－(45°＋120°)＝15°

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{10\times\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{10\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5(\sqrt{3}-1)$$

答：∠C＝60°，∠A＝75°，a＝$5(\sqrt{3}+1)$；或者是∠C＝120°，∠A＝15°，a＝$5(\sqrt{3}-1)$

7．(15分)、已知园内接四边形ABCD中，∠A＝60°，∠B＝90°，AB＝2，CD＝1．求BC和DA



解：解法一：∵∠B＝90°，∴AC是外接园的直径。

从而知　∠D＝90°，

∠C＝360°－90°－60°－90°＝120°

设BC＝x，DA＝y，则由勾股定理，可推得

$$AB^2+BC^2=AD^2+DC^2$$

即　$4+x^2=y^2+1$……(1)

由余弦定理，又可推得

$$AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$$

即　$4+y^2-2y=x^2+1+x$…………(2)

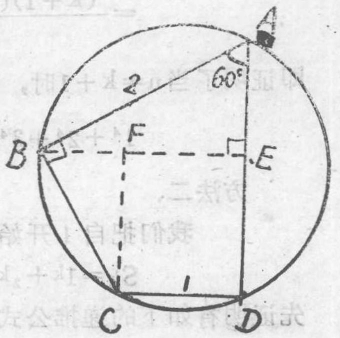
解由(1)与(2)组成的方程组，可得

$$\begin{cases}x_1=2\sqrt{3}-2\\y_1=4-\sqrt{3}\end{cases}\quad 和\quad\begin{cases}x_2=-2\sqrt{3}-2\\y_2=4+\sqrt{3}\end{cases}$$ (x为负值，不合题意，舍去)

答：BC＝$2\sqrt{3}-2$，DA＝$4-\sqrt{3}$

解法二、

由$\angle B=90°$，可知AC为外接园直径，因而 $\angle D=90°$，$\angle C=120°$



过B点作$BE\perp AD$，交AD于E；过C点作$CF\perp BE$，交BE于F，这样CDEF是个矩形．

在直角△ABE中，$\because \angle ABE=30°$，

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=1$

$BE=AB\sin 60°=2\times\sin 60°=\sqrt{3}$

在直角△BCF中，$\angle CBF=90°-30°=60°$，

$BF=BE-FE=BE-CD=\sqrt{3}-1$

$$\therefore \quad BC=\frac{BF}{\cos 60°}=\frac{\sqrt{3}-1}{\frac{1}{2}}=2(\sqrt{3}-1),$$

$$CF=BF\,\mathrm{tg}\,60°=(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$$

因此$AD=AE+ED=AE+CF=1+3-\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$

答：$BC=2(\sqrt{3}-1)$，　$AD=4-\sqrt{3}$

参考题(不记分，作完上面试题检查无误后，有时间再作)

1．用数学归纳法或其他方法证明：

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

证明：

方法一、用数学归纳法．

当$n=1$时，左边$=1^4=1$，右边$=\frac{1\times2\times3\times5}{30}=1$因此等式成立．

假定当$n=k$时，等式成立，即有

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+k^4=\frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}$$

那末　$$1^4+2^4+3^4+\cdots+k^4+(k+1)^4=\frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}+(k+1)^4$$

$$=\frac{(k+1)[k(2k+1)(3k^2+3k-1)+30(k+1)^3]}{30}$$

$$=\frac{(k+1)(6k^4+39k^3+91k^2+89k+30)}{30}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(6k^3+27k^2+37k+15)}{30}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)(3k^2+9k+5)}{30}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1][3(k+1)^2+3(k+1)-1]}{30}$$

即证明了当$n=k+1$时，等式也成立。因此，对于任意自然数n，成立等式

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

方法二、

我们把自1开始n个自然数的k次方之和记作S_k，即

$$S_k=1^k+2^k+\cdots\cdots+n^k\cdots\cdots(1)$$

先证明有如下的递推公式

$$C_{k+1}^{k}S_k+C_{k+1}^{k-1}S_{k-1}+\cdots+C_{k+1}^{1}S_1=(n+1)^k-(n+1)\cdots\cdots(2)$$

事实上

$$C_{k+1}^{k}S_k+C_{k+1}^{k-1}S_{k-1}+\cdots+C_{k+1}^{1}S_1$$

$$=(C_{k+1}^{k}+C_{k+1}^{k-1}+\cdots+C_{k+1}^{1})+(2^kC_{k+1}^{k}+2^{k-1}C_{k+1}^{k-1}+\cdots+2C_{k+1}^{1})$$

$$+\cdots+(n^kC_{k+1}^{k}+n^{k-1}C_{k+1}^{k-1}+\cdots+nC_{k+1}^{1})$$

$$=[(1+1)^{k+1}-2]+[(2+1)^{k+1}-1-2^{k+1}]+\cdots$$

$$+[(n+1)^{k+1}-1-n^{k+1}]$$

$$=2^{k+1}+3^{k+1}+\cdots+(n+1)^{k+1}-2^{k+1}-\cdots-n^{k+1}-(n+1)$$

$$=(n+1)^{k+1}-(n+1)$$

因此，(2)式成立.在(2)中令$k=1$，得

$$S_1=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{C_2^1}=\frac{n(n+1)}{2}$$

令$k=2$，得 $S_2=\dfrac{(n+1)^3-(n+1)-C_3^1S_1}{C_3^2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)-\frac{3n(n+1)}{2}}{3}$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

令$k=3$，得 $S_3=\dfrac{(n+1)^4-(n+1)-C_4^1S_1-C_4^2S_2}{C_4^3}$

$$=\frac{(n+1)^4-(n+1)-2n(n+1)-n(n+1)(2n+1)}{4}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

令$k=4$，得 $S_4=\dfrac{(n+1)^5-(n+1)-C_5^1S_1-C_5^2S_2-C_5^3S_3}{C_5^4}$

$$=\frac{(n+1)^5-(n+1)-\frac{5}{2}n(n+1)-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{5}{2}n^2(n+1)^2}{5}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

即 $$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

(注：也可以利用 $(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=C^1_{k+1}n^k+C^2_{k+1}n^{k-1}+\cdots+1$，令 $k=2$，3，4，即可分别求出 S_2，S_3，S_4 等)

2. 计算下列积分：

(1) $\int_0^1 xe^{-x}dx$；　(2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　$(a>0)$

解：(1) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx=-\int_0^1 xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$

$$=-\frac{1}{e}-e^{-x}\Big|_0^1=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}$$

(2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

令 $x=a\sin t$　$(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2})$，则 $dx=a\cos t\,dt$，$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$

$$\therefore \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin t)^2(a\cos t)(a\cos t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^4\sin^2t\cos^2t\,dt=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt$$

$$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{a^4}{8}\left(t-\tfrac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4\pi}{16}$$