湖南省株洲（试点）

1. （4分）$y=2\sqrt{x^2}$和$y=2x$是不是同一个函数？为什么？

解 不是同一个函数。

$\because$ $y=2\sqrt{x^2}$ 当 $x\geqslant 0$时$y=2x$
当 $x\leqslant 0$时$y=-2x$

$\therefore$ $y=2\sqrt{x^2}$与$y=2x$ 并不恒等，不是同一个函数。

2. （4分）确定下列各式的符号：

(1) $1-\sin 800^\circ$ ；(2) $\cos 20^\circ-\sin 20^\circ$ ；

(3) $tg 288^\circ\cdot tg 510^\circ$。

解 (1) $1-\sin 800^\circ=1-\sin(2\times 360^\circ+80^\circ)$

$=1-\sin 80>0$;

(2) $\cos 20^\circ-\sin 20^\circ=\cos(90^\circ-70^\circ)-\sin 20^\circ$

$= sin70° - sin20° > 0;$

(3) $tg288° \cdot tg510° = tg(360° - 72°) \cdot tg(360° + 150°)$

$= -tg72° \cdot tg150° = -tg72° \cdot tg(180° - 30°)$

$= -tg72°(-tg30°) = tg72° \cdot tg30° > 0.$

3. (4分)已知x、y都是实数，且

$(2x-1)^2 + (y-8)^2 = 0$，求$log_2 xy = ?$

解 由x、y都是实数，且$(2x-1)^2+(y-8)^2=0$

可知 $(2x-1)^2=0$和$(y-8)^2=0$，

即 $x=\frac{1}{2}$和$y=8$。

$\therefore$ $log_2 xy = log_2(\frac{1}{2}\times 8) = log_2 4 = 2log_2 2 = 2.$

4. (4分)$\sqrt{(log_3 20)^2 - 6log_3 20 + 9} = ?$

解 原式$=\sqrt{(log_3 20 - 3)^2} = |log_3 20 - 3|$

而 $3 = log_3 3^3 = log_3 27 > log_3 20$

$\therefore$ 原式$= |log_3 20 - 3| = 3 - log_3 20.$

5. (6分)已知 $log_{15}7 = a$, $log_{15}8 = b$，求$log_{56}15 = ?$

解 $log_{56}15 = \frac{log_{15}15}{log_{15}56} = \frac{1}{log_{15}(7\times 8)} = \frac{1}{log_{15}7 + log158}$

$= \frac{1}{a+b}.$

6. (6分)化简：$\left(\frac{x^{-1}-1}{x^{-1}+1} - \frac{x^{-1}+1}{x^{-1}-1}\right.$

$\left.\cdot (2^{-1} - 4^{-1}x^{-1} - 4^{-1}x)\right.$

解 原式$=\left(\frac{1+x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x} - \frac{x}{4}\right)$

$= \frac{-4x}{1-x^2}\cdot\frac{2x-1-x^2}{4x} = \frac{(x-1)^2}{1-x^2} = \frac{1-x}{1+x}.$

7. (6分)h为什么数时，方程$2hx^2+(8h+1)x=-8h$有两个不相等的实根？

解 要使方程有两个不相等实根，必须根的判别式大于0，即$(8h+1)^2-4\times 2h\times 8h>0$

整理为 $16h+1>0$

$\therefore\ h>-\frac{1}{16}$时，方程有两不相等实根。

8. (6分)证明恒等式：

$$\frac{2\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}{1+\sin(\pi+\theta)+\sin^2(\pi-\theta)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$=tg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

证明 左式$=\frac{2\sin\theta\cdot\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$$=\frac{(2\sin\theta-1)\cdot\cos\theta}{2\sin^2\theta-\sin\theta}=\frac{(2\sin\theta-1)\cdot\cos\theta}{(2\sin\theta-1)\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=ctg\theta.$$

右式$=ctg\theta$，

$\because$ 左式＝右式

$$\therefore\ \frac{2\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}{1+\sin(\pi+\theta)+\sin^2(\pi-\theta)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

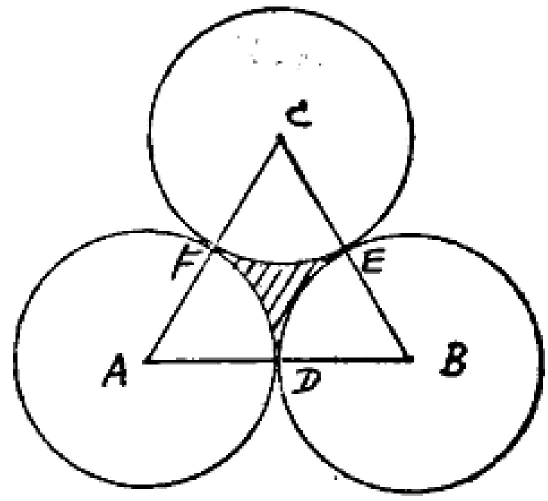
$$=tg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

9. (1)(6分) 三个半径都是R的圆两两外切，求过

三个切点的三个圆弧所围成图形的面积。

解 连结A、B、C三点。

由图可知，所求的面积s等于ΔABC的面积减去扇形ADF面积的3倍

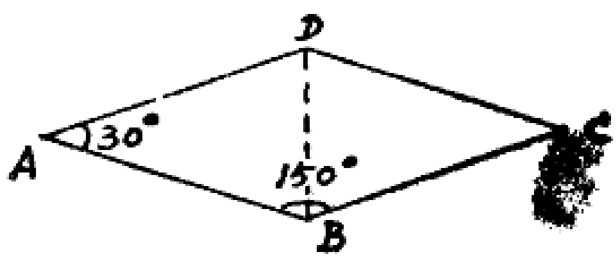


$$\therefore \quad s=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin A-3\left(\frac{1}{6}\pi\cdot AD^2\right)=\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot 2R\cdot \sin 60^\circ-\frac{1}{2}\pi R^2$$

$$=\sqrt{3}R^2-\frac{\pi}{2}R^2=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)R^2$$

(2) (4分)已知菱形面积为$392cm^2$，有一角为150°，求边长。

解 如图$\because \angle B=150°$，由菱形的性质可知$\angle A=30°$，依题意可得



$$2\left(\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot \sin A\right)=392$$

$\because \quad AB=AD$,

即 $AB\cdot AB\cdot \sin 30^\circ=392$，$\frac{1}{2}AB^2=392$

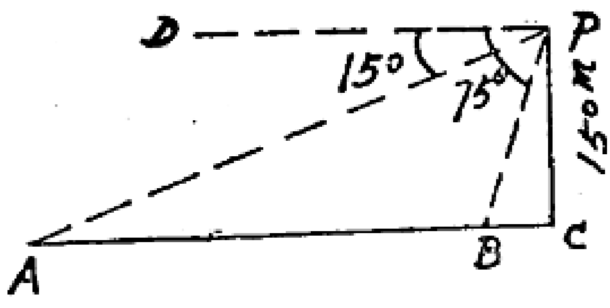
$AB^2=784$，　　$AB=\sqrt{784}=28(cm)$

答：菱形边长为28cm。

10．(6分) 在高150m的山顶上测得正南两船的俯角

分别为15°和75°，求两船的距离.

解 ∵ 两船的距离



$AB=AC-BC$

$=150tg(90°-15°)$

$-150tg(90°-75°)$

$=150(ctg15°-tg15°)$

而 $sin15°=sin(45°-30°)=sin45°cos30°-cos45°sin30°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$cos15°=cos(45°-30°)$

$=cos45°cos30°+sin45°sin30°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore\quad AB=150\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=150\sqrt{12}=300\sqrt{3}\approx519(m).$$

答：两船的距离约为519m.

11. (8分)有某种农药一桶，倒出8升后，用水补满；然后又倒出4升，再用水补满．于是测得桶中农药与水之比为18:7，木桶的容积.

解 设桶的容积为x升，依题意得：

$$\frac{x-8-\frac{x-8}{x}\times4}{8-\frac{8}{x}\times4+4}=\frac{7}{18}$$

即 $$\frac{x^2-12x+32}{12x-32}=\frac{18}{7}$$

整理得 $7x^2-300x+800=0$

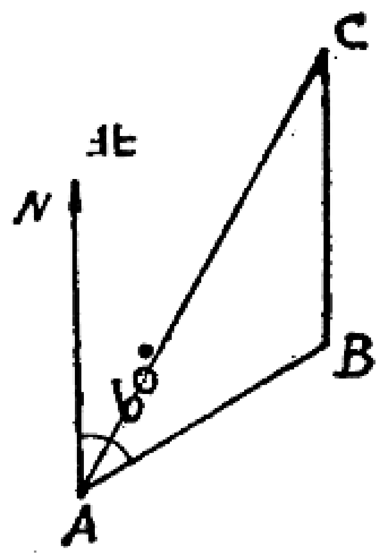
$$(7x-20)(x-40)=0$$

$\therefore$ $x_1=\frac{20}{7}$(不合题意、舍去)

$x_2=40$.

答：桶的容积为40升

12. (9分)甲船在A点发现乙船在北偏东60°的B处，乙船以每小时a浬的速度向北行驶，已知甲船速度是每小时$\sqrt{3}a$浬，问甲船应依什么方向前进，才能最快地与乙船相会?



解 如图：在ΔABC中 .

$\angle B=180°-60°=120°$

设 t小时后两船相遇于C .

则 $AC=\sqrt{3}at$，$BC=at$，根据正弦定理得：

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$$

得 $\sin A=\frac{BC\cdot\sin B}{AC}$.

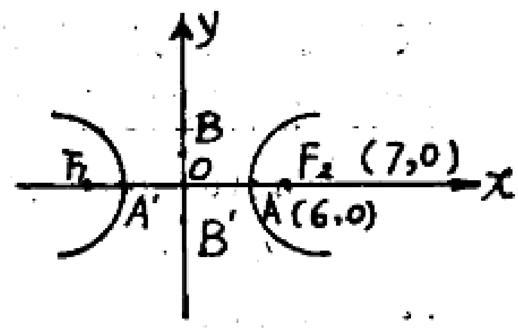
$=\frac{at\sin 120°}{\sqrt{3}\ at}=\frac{1}{2}$ $\because$ A是锐角

$\therefore$ $A=30°$ $\angle NAC=60°-30°=30°$.

答：甲船应以北偏东30°的方向前进，才能最快地与乙船相会.

13. （9分）双曲线中心在原点，焦点在坐标轴上，焦距为14，顶点间距离为12，求双曲线方程。

解 设所求双曲线方程为：



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

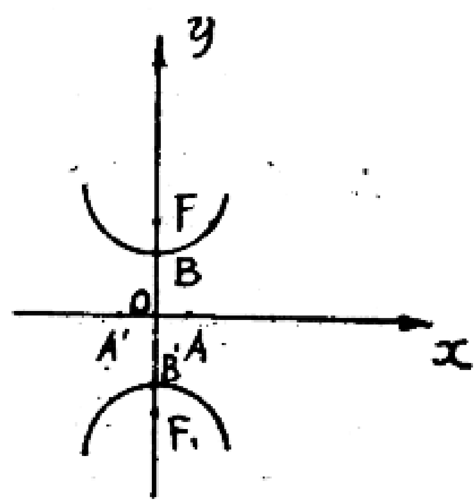
∵ 顶点间距 $2a=12$.

∴ $a=6$

焦距 $2c=14$。 $C=7$

而 $b^2=C^2-a^2=49-36=13$

故所求的方程为：



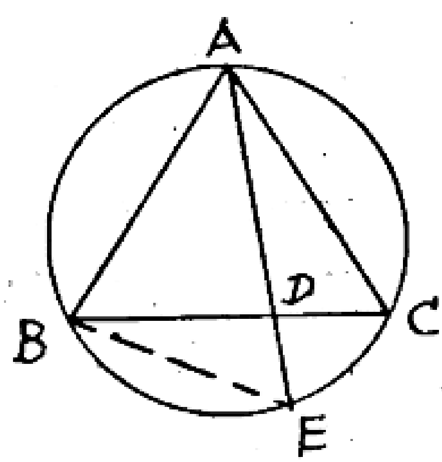
$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$$

对于焦点在 y 轴上的双曲线，同理可求得方程为：

$$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{13}=1$$.

14. （9分）从等腰ΔABC的顶点A引直线交BC于D，交外接圆于E，求证AB是AD和AE的比例中项.

已知 从等腰ΔABC 的顶点A引直线交BC于D，交外接圆于E。



求证 $AB^2=AD\cdot AE$。

证明 连结BE。

∵ $\angle ABC=\angle ACB$

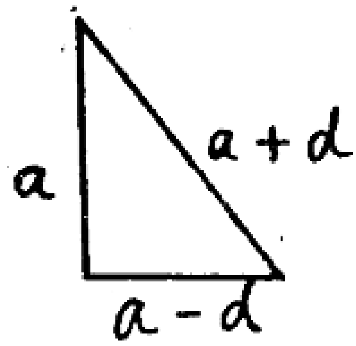
而 $\angle AEB=\angle ACB$（同弧上的圆周角相等）

∴ $\angle ABC=\angle AEB$ 又$\angle BAE$是公共角

∴ $\Delta ABD\backsim\Delta AEB$

故 $\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AD}$ 即 $AB^2=AD\cdot AE$.

15. (9分)如果一个直角三角形三边的长成等差数列，试证明三边的比是 3:4:5 .



证明 依题意直角Δ三边为$(a-d)$. a.$(a+d)$，公差为 d，如图所示

∵ $a^2+(a-d)^2=(a+d)^2$

$a^2=(a+d)^2-(a-d)^2$

$=a^2+2ad+d^2-a^2+2ad-d^2=4ad$.

∴ $d=\frac{a^2}{4a}=\frac{a}{4}$

三边的比是 $(a-\frac{a}{4}):a:(a+\frac{a}{4})$

即 $\frac{3a}{4}:a:\frac{5a}{4}$

$3a:4a:5a$

$3:4:5$

参考题 (不记分、作完正题后，有时间者可作)．

试求 $f(x)=x^4-42x^3+435x^2+113x-66$和

$g(x)=x^2-x-462$的公根.

解法一 $g(x)=x^2-x-462=0$的根.

是 $x_1=22$，和$x_2=-21$

代入 $f(x)$：

$f(-21)\neq 0$ 不是公根.

$f(22)=0$ ∴ $x=22$是$f(x)$和$g(x)$的公根.

解法二 $g(x)=x^2-x-462$的根.

是 $x_1=22$ 和 $x_2=-21$。

用综合除法 $\dfrac{f(x)}{(x+21)}$余数不为0

$\therefore\ x_2=-21$不是两者的公根。

而 $\dfrac{f(x)}{(x-22)}$余数为0， $\therefore\ x_1=22$是两者的公根。

解法三 用辗转相除法求$f(x)$和$g(x)$的最高公因式

+1	+1	−42	+435	+113	−66	+1	−1	−462	−1
	+1	−1	−462			+1	−22		
−41		−41	+897	+113	−66		+21	−462	−21
		−41	+41	+18942			+21	−462	
856			+856	−18829	−66			0	
			+856	−856	−395472				
				−17973	+395406				
	上式约去9			−1997	+43934				
	再约去1997			−1	+22				

$\therefore\ -x+22$是$f(x)$和$g(x)$的最高公因式。

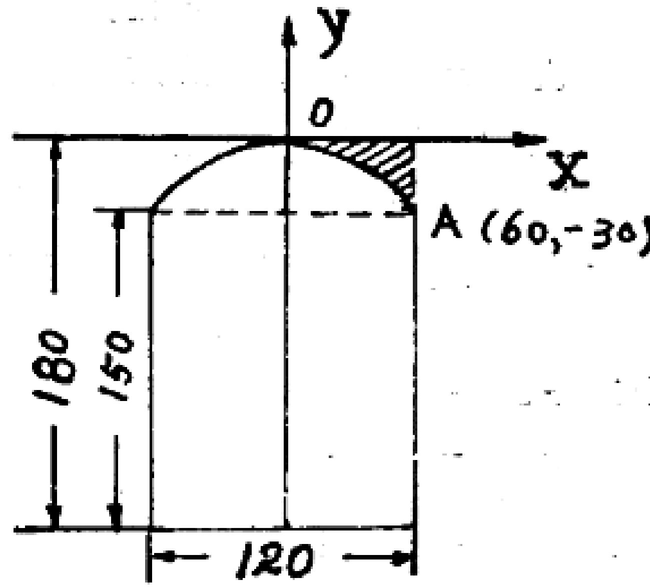
故 $-x+22=0$ 即$x=22$是$f(x)$和$g(x)$的公根。

2． 求函数 $y=(2x+1)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{3}x+1\right)^3$的导数。

解
$$y'=\left(-\frac{1}{3}x+1\right)^3\cdot\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2+(2x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 3\left(-\frac{1}{3}x+1\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\left(1-\frac{x}{3}\right)^3\cdot(2x+1)^{-\frac{1}{2}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{3}\right)^2.$$

3． 有一窗户，顶部为一抛物线的拱形，窗宽 120cm，边高150cm，顶点高180cm，求它的面积。

解 取如图所示的直角坐标系，设抛物线方程为 $x^2=-2py$。将A点坐标 $(60,-30)$代入上方程得 $60^2=-2p(-30)$得$p=60$



∴ 抛物线方程为 $x^2=-2\times60y$ 亦可变成

$$y=-\frac{1}{120}x^2.$$

图中所影部分面积为：

$$\int_0^{60}\frac{x^2}{120}dx=\frac{1}{360}x^3\Big|_0^{60}=\frac{1}{360}\times60^3=600.$$

窗户面积$S=2(180\times60-600)=2\times10200$

$$=20400(cm^2)=2.04(m^2).$$

答：所求窗户的面积是$2.04m^2$。