贵州1977年高考数学试题解

文科考生只作前 5 题，理科考生 8 题全作.

一、将下列各式化成最简形式:

1．$\sqrt[4]{a^{-2}b^{3}}\cdot\sqrt[3]{a^{4}b^{-2}}\div\sqrt[6]{a^{5}\cdot b^{-2}}$

解法一.

$$原式=\frac{\sqrt[12]{a^{-6}b^{9}a^{16}b^{-8}}}{\sqrt[12]{a^{10}b^{-4}}}=\sqrt[12]{\frac{a^{10}b}{a^{10}b^{-4}}}=\sqrt[12]{b^{5}}$$

解法二.

$$原式=a^{-\frac{2}{4}}b^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{6}}=b^{\frac{5}{12}}=\sqrt[12]{b^{5}}$$

2．$\mathrm{Log}_2\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{Log}_2\sin\frac{\pi}{6}$

解法一.

$$原式=\mathrm{Log}_2\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{Log}_2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{Log}_2 2-\mathrm{Log}_2 2-\mathrm{Log}_2 1+\mathrm{Log}_2 2$$

$=\frac{1}{2}-1-0+1=\frac{1}{2}.$

解法二.

原式$=\mathrm{Log}_2\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{Log}_2\frac{1}{2}=\mathrm{Log}_2 2^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{Log}_2 2^{-1}=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$

解法三、原式$=\mathrm{Log}_2(\frac{\sqrt{2}}{2}\div\frac{1}{2})=\mathrm{Log}_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

二、计算下列各题：

1．已知 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2ab}{a^2-b^2}$，求$\sin\alpha$·

解法一.

$\because \sec^2\alpha=1+\mathrm{tg}^2\alpha=1+\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}$

$\therefore \sec\alpha=\pm\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

故 $\cos\alpha=\pm\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

$\therefore \sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2ab}{a^2-b^2}\cdot\left(\pm\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)=\pm\frac{2ab}{a^2+b^2}$

解法二

$$\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos x}=\frac{2ab}{a^2-b^2}\cdots\cdots(1)\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

由(1)得 $\cos\alpha=\frac{a^2-b^2}{2a_b}\sin\alpha$代入(2)，得

$$\sin^2\alpha=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\therefore \sin\alpha=\pm\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

2．已知：$m+\frac{1}{m}=2$，求$m^2+\frac{1}{m^2}=?$ $m^3+\frac{1}{m^3}=?$

解法一．$m^2+\frac{1}{m^2}=(m+\frac{1}{m})^2-2m\cdot\frac{1}{m}=(m+\frac{1}{m})^2-2=2^2-2=2.$

$m^3+\frac{1}{m^3}=(m+\frac{1}{m})^3-3m\cdot\frac{1}{m}\quad(m+\frac{1}{m})=(m+\frac{1}{m})^3-3(m+\frac{1}{m})$

$=2^3-3\cdot2=2.$

解法二．由已知等式 $m+\frac{1}{m}=2$，可得

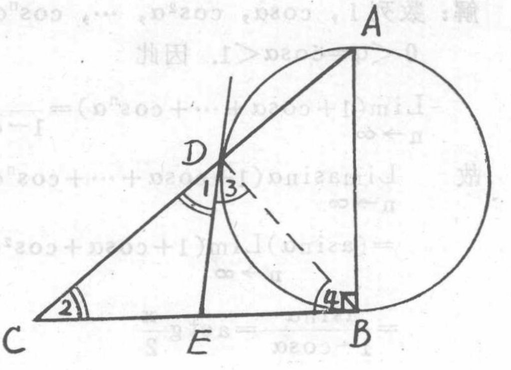
$$m^2-2m+1=0. \qquad (m-1)^2=0$$

因此. $m=1$. 故

$$m^2+\frac{1}{m^3}=1^2+\frac{1}{1^2}=2.$$

$$m^3+\frac{1}{m^3}=1^3+\frac{1}{1^3}=2.$$

三、以直角三角形ABC的一直角边AB为直径作园，此园与斜边AC交于D，过D引园的切线交BC于E. 试证，EB＝CE.



已知：AB为直径，$\angle ABC=90^\circ$

AC与园相交于D，DE是园的切线

求证：EB＝CE.

证明：连接BD则$\angle ADB=90^\circ$.

$\because \angle ABC=90^\circ$，AB又是直径.

$\therefore$ EB是园的切线.

$\therefore$ ED＝EB（园外一点，引园的两切线段相等）……(1)

$\therefore \angle 3=\angle 4$.

又$\because \angle 1+\angle 3=\angle 2++\angle 4=90^\circ$，而$\angle 3=\angle 4$(已证).

$\therefore \angle 1=\angle 2$. 从而CE＝ED. ……(2)

由(1)和(2)即得　　EB＝CE.（等量代换）

四. 求到点A(1,2)和点B(4,1)等距离的点的轨迹的方程.

解：设P(x,y)是到A、B等距离的点，则

$$|PA|=|PB|$$

由两点间的距离公式得

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$$

两边平方

$$(x-1)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y-1)^2$$

整理化简后得P(x,y)的轨迹方程为

$$3x-y-6=0 \qquad (\text{或者写成}\ y=3x-6)$$

五、用长8米的木料，做一矩形的窗框，问长和宽如何选择，才能使窗子透过的光线最多?

解：设窗子的宽为x米，则长为(4－x)米. 而窗子的面积

$$S=x(4-x)=-(x-2)^2+4$$

所以，当$x=2$时，S有极大值4. 这时，宽为$4-x=2$. 故窗子为边长 2 米的**正方形时**，透过的光线最多.

答：当窗子的长和宽相等，且都为 2 米时，才能使透过的光线最多。

六. 求$\lim\limits_{n\to\infty} a\sin\alpha\,(1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cdots+\cos^n\alpha)=?$（其中 a 为任意实常数，

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$）

解：数列 1，$\cos\alpha$，$\cos^2\alpha$，…，$\cos^n\alpha$，…为无穷递缩等比数列，其公比 $0<q=\cos\alpha<1$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}(1+\cos\alpha+\cdots+\cos^n\alpha)=\frac{1}{1-\cos\alpha}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} a\sin\alpha(1+\cos\alpha+\cdots+\cos^n\alpha)$$

$$=(a\sin\alpha)\lim_{n\to\infty}(1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cdots+\cos^n x)$$

$$=\frac{a\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=a\,ctg\frac{x}{2}$$

七. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根为$tg\alpha$与$tg\beta$，求

$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$的值，（其中 P、q为任意实常数）

解：根据一元二次方程根与系数的关系：

$$tg\alpha+tg\beta=-p,\qquad tg\alpha\cdot tg\beta=q$$

当$q\neq1$时得 $$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{-p}{1-q}$$

因此

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$$

$$=\cos^2(\alpha+\beta)[tg^2(\alpha+\beta)+p\,tg(\alpha+\beta)+q]$$

$$=\frac{1}{1+tg^2(\alpha+\beta)}[tg^2(\alpha+\beta)+p\,tg(\alpha+\beta)+q]$$

$$=\frac{1}{1+\frac{p^2}{(1-q)^2}}\left[\frac{\rho^2}{(1-q)^2}+\frac{-p^2}{1-q}+q\right]=q$$

当$q=1$时，$\cos(\alpha+\beta)=0$，$\sin(\alpha+\beta)=\pm1$，因此原式$=1$.

八. 设有直线（L）与曲线（c）：

(L)：$y=ax-1$.

(c)：$r\sin\theta=\sin2\theta$

问(L)与(c)在什么条件下相交、相切、不相交

解：将(c)化成直角坐标方程：

(c)：$y=\frac{2xy}{x^2+y^2}$，即$\frac{2x}{x^2+y^2}=1$，或者写成

(c)：　$(x-1)^2+y^2=1$.

解方程组：$\begin{cases} y=ax-1 & (1) \\ (x-1)^2+y^2=1. & (2) \end{cases}$

将(1)代入(2)，整理后得　$(1+a^2)x^2-2(a+1)x+1=0$.（3）

当(3)的判别式$\triangle>0$时，方程组(1)、(2)有两组不相同的解，表示(L)与(c)有两个交点，即相交；当$\triangle=0$时，方程组只有一组解，表示(L)与(c)的交点只有一个，即相切；当$\triangle<0$时，方程组无解，表示(L)与(c)没有交点，即不相交，下面分别求出这三种情况a的值.

$\Delta>0$时，　即　$(4a+1)^2-4(1+a^2)>0$　$8a>0$

$\therefore a>o$时(L)与(c)相交.

$\Delta=0$时，即　$4(a+1)^2-4(1+a^2)=0$　$8a=0$

$\therefore a=0$时相切.

$\triangle<0$时．即　$4(a+1)^2-(1+a^2)<0$　$8a<0$

$\therefore a<0$时不相交.

故当$a>0$时，(L)与(c)相交；$a=0$时，(L)与(c)相切；$a<0$时，(L)与(c)不相交

参考题：（由考生选作，25岁以上的考生必作）

一. 设某平板上任意一点的电势，在$\rho\geqslant1$时，由$E=Ln\rho$给出，这里ρ是以原点为起点的矢径。试求在点$\rho=5$，$\theta=\arcsin0.8$处，沿此点至$\rho=10$，$\theta=\frac{\pi}{2}$的方向E的变化率.

解：把极坐标化为直角坐标：

$E=Ln\sqrt{x^2+y^2}$，求在点(3,4)处，沿(3,4)至(0,10)方向上的E的变化率.

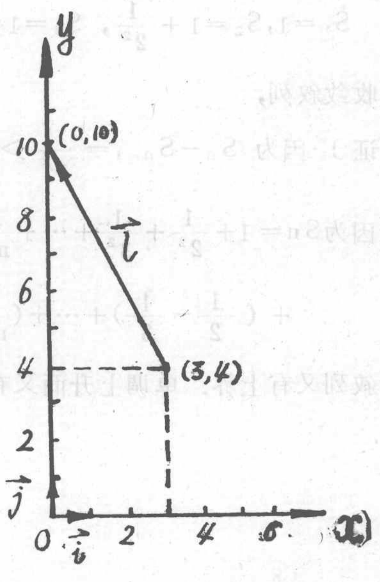
从(3,4)至(0,10)的方向记为$\vec{L}$则

$\vec{L}=(0-3)\vec{i}+(10-4)\vec{j}=-3\vec{i}+6\vec{j}$

其中$\vec{i}$、$\vec{j}$分别表示横轴、纵轴上的单位向量. 问题的实质，就是求E在$\vec{L}$方向上的方向导数.$\frac{\partial E}{\partial \vec{L}}$求方向导数的计算公式是

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{L}}=\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial E}{\partial y}\cos\beta$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$是$\vec{L}$的方向余弦.



$$\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{\partial(Ln\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}=\frac{\partial(Ln\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{L}\cdot\vec{i}}{|\vec{L}||\vec{i}|}=\frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+6^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{L}\cdot\vec{j}}{|\vec{L}||\vec{j}|}=\frac{6}{\sqrt{(-3)^2+6^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

因此 $\dfrac{\partial E}{\partial \vec{L}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2}$

在点（3,4）处

$$\left.\frac{\partial E}{\partial \vec{L}}\right|_{\substack{x=3\\y=4}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{25}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4}{25}=\frac{\sqrt{5}}{25}$$

答：E在点$\rho=5$，$\theta=\arcsin0.8$处，沿此点至$\rho=10$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$方向上的变化率为

$$\frac{\sqrt{5}}{25}$$

二、证明

$$S_1=1,S_2=1+\frac{1}{2^2},\ S_3=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2},\ \cdots,\ S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2},\ \cdots$$

是收敛叙列，

〔证〕·因为 $S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{n^2}>0$，所以此叙列是单调上升叙列。

又因为$S_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<1+\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}=1+(1-\dfrac{1}{2})$

$$+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2$$

此叙列又有上界．单调上升而又有上界的叙列，必收敛．故$\{S_n\}$收敛