辽宁1977年高考数学试题解

一、

1．计算$\sqrt{a^2-2ab+b^2}$　（$a<b$）

解：原式$=\sqrt{(a-b)^2}=b-a$

2．把$x^5y-x^3y+2x^2y-xy$分解因式

解：原式$=xy(x^4-x^2+2x-1)=xy[x^4-(x^2-2x+1)]$

$=xy[x^4-(x-1)^2]=xy(x^2+x-1)(x^2-x+1)$

3．计算：$\dfrac{0.027^{-\frac{1}{3}}+(-\frac{1}{6})^{-2}-3^{-1}}{(-1000)^0-\mathrm{Log}_{10}\sqrt[3]{10}}\times 5^{\mathrm{Log}_5\frac{2}{3}}$

解：原式$=\dfrac{\frac{10}{3}+36-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{39}{\frac{2}{3}}\times\dfrac{2}{3}=39$

4．如图，M表示地平面，PC表示直立地面的电柱，AC＝6m，BC是AC的$\frac{2}{3}$，求拉线AB的长．（不必再写已知和求）

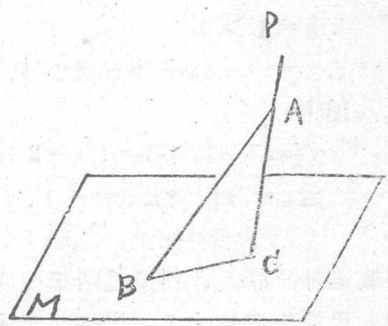
解：∵PC⊥平面M，

∴PC⊥BC

∴△ABC是直角三角形

$AB=\sqrt{6^2+4^2}$

$=2\sqrt{13}$（m）



第一、4题附图

即拉线AB的长为$2\sqrt{13}$（m）

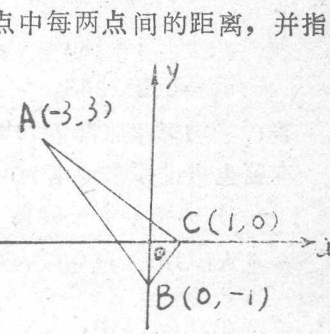
5．求出A（－3，3）、B（0，－1）、C（1，0）三点中每两点间的距离，并指出以这三点为顶点的三角形ABC是什么样的三角形．

解：$|AB|=\sqrt{[0-(-3)]^2+(-1-3)^2}=5$

$|AC|=\sqrt{[1-(-3)]^2+(0-3)^2}=5$

$|BC|=\sqrt{(1-0)^2+[0-(-1)]^2}=\sqrt{2}$

因为$|AB|=|AC|$，所以△ABC是等腰三角形．



第一，5题附图

二、判别二次函数$y=x^2-4x+3$有最大值还是有最小值？并把它求出来；写出这个函数图象的顶点坐标，用描点法画出这个函数的图象。（画出草图即可）

解法一：

$\because a=1>0$

$\therefore y=x^2-4x+3$ 有最小值.

当 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times1}=2$时，

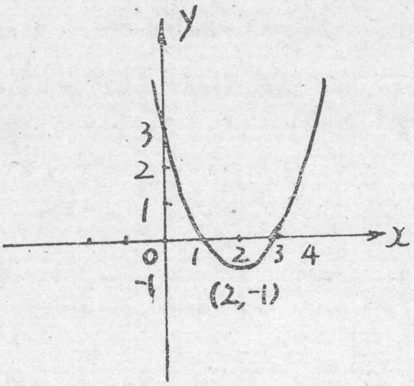
$$y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$=\frac{4\times1\times3-(-4)^2}{4\times1}$$

$$=-1.$$

抛物线的顶点坐标是$(2,-1)$.

x	……	0	1	2
y	……	3	0	-1



第二题附图

解法二：

$\because a=1>0$

$\therefore y=x^2-4x+3$ 有最小值.

配方：

$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1.$

当$x=2$时，$y_{最小}=-1.$

（以下解答同上，从略）

三、制造某种产品，计划经过两年使成本降低36%，问平均每年应降低百分之几？

解：设原来成本为1，平均每年应降低的百分数为x，根据题意，得

$(1-x)^2=1-36\%$

$(1-x)^2=0.64$

$1-x=\pm0.8$

即 $x_1=1.8=180\%$（不合题意，舍去）

$x_2=0.2=20\%$

答：平均每年应降低20%.

本题也可设原来成本为a（$a>0$），平均每年应降低的百分数为x，根据题意，得$a(1-x)^2=a(1-36\%)$.

四、在△ABC中，已知$\cos A=\frac{5}{13}$，$\cos B=\frac{3}{5}$，求$\cos C$的值

解：在△ABC中，$\because A+B+C=180°$

$\therefore \cos C=\cos[180°-(A+B)]$

$=-\mathrm{Cos}(A+B)$

$=-(\mathrm{Cos}A\cdot\mathrm{Cos}B-\mathrm{Sin}A\cdot\mathrm{Sin}B)$

$=\mathrm{Sin}A\cdot\mathrm{Sin}B-\mathrm{Cos}A\cdot\mathrm{Cos}B \qquad (1)$

又$\because \mathrm{Cos}A=\frac{5}{13}$，$\mathrm{Cos}B=\frac{3}{5}$，

$\therefore \mathrm{Sin}A=\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2A}=\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=\frac{12}{13}$，

$\mathrm{Sin}B=\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2B}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$

将SinA、SinB、CosA、CosB的值代入(1)，得

$\mathrm{Cos}C=\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}=\frac{33}{65}$

五、求证：两条对角线相等的梯形是等腰梯形（画出图形，写出：已知、求证、证明）

已知：四边形ABCD是梯形，$DC\parallel AB$，AC和BD是对角线，且$AC=BD$

求证：$AD=BC$

证法一：作$CE\perp AB$，$DF\perp AB$，E和F是垂足

$\because DC\parallel AB$

$\therefore CE=DF$

在直角三角形ACE和BDF中

$\because CE=DF$，$AC=BD$，

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle BDF$

$\therefore \angle CAE=\angle DBF$

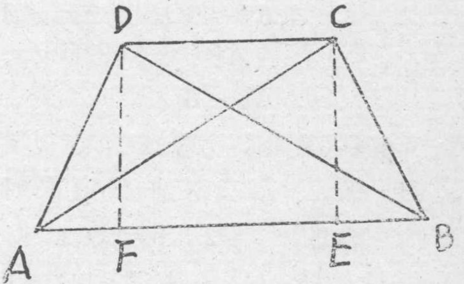
又在$\triangle CAB$和$\triangle DBA$中

$\because AC=BD$，$\angle CAB=\angle DBA$

$AB=AB$

$\therefore \triangle CAB\cong\triangle DBA$

$\therefore AD=BC$



第五题证法一附图

证法二：作$CE\parallel DB$，交AB的延长线于E，

又$DC\parallel BE$，则四边形BECD是平行四边形

$\therefore EC=BD$

又$AC=BD$

$\therefore AC=EC$

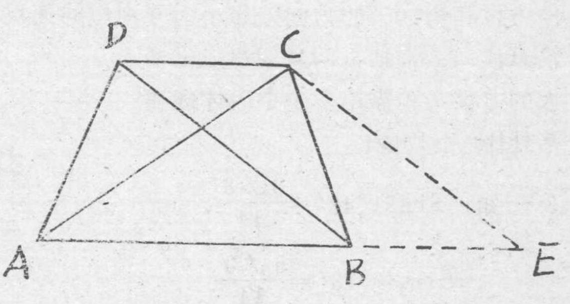
$\therefore \angle CAB=\angle CEA$

又$\angle DBA=\angle CEA$

$\therefore \angle CAB=\angle DBA$

在$\triangle DAB$和$\triangle CBA$中

$\because DB=AC$，$\angle DBA=\angle CAB$，$AB=AB$



第五题证法二附图

$\therefore \triangle DAB \cong \triangle CBA$

$\therefore AD = BC$

证法三：设AC、BD交于O点

$\because DC \parallel AB$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$

$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD$

$\therefore \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{BO}{OD}$

因此，$\dfrac{AO+OC}{OC} = \dfrac{BO+OD}{OD}$

即$\dfrac{AC}{OC} = \dfrac{BD}{OD}$

$\because AC = BD$

$\therefore OC = OD$

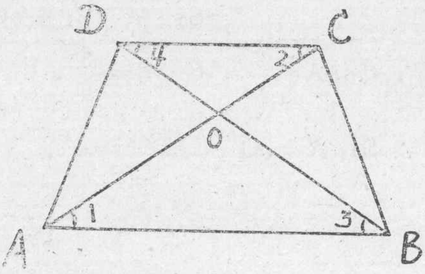
$\therefore \angle 2 = \angle 4$

在$\triangle ADC$和$\triangle BCD$中，

$\because AC = BD$，$\angle 2 = \angle 4$，$DC = DC$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BCD$

$\therefore AD = BC$



第五题　证法三附图

六、α是多少度时，方程$2x^2 + 2\sqrt{2}x + tg\alpha = 0$有两个相等的实数根？（$0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$）

解：要使一元二次方程有两个相等的实数根，必须$b^2 - 4ac = 0$。

这里，$a = 2$，$b = 2\sqrt{2}$，$C = tg\alpha$。

$(2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times tg\alpha = 0$

$tg\alpha = 1$

$\because 0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$

$\therefore \alpha = 45^\circ$或$\alpha = 225^\circ$

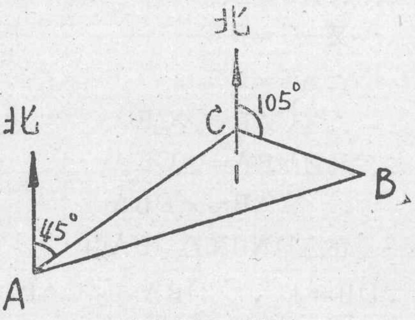
即$\alpha = 45^\circ$或$\alpha = 225^\circ$时，方程$2x^2 + 2\sqrt{2}x + tg\alpha = 0$有两个相等的实数根.

七、如图，我海军某舰艇在A处测得入侵敌舰在方位角为45°、距离为10海里的C处，并正沿方位角为105°的方向以每小时9海里的速度逃跑，我舰艇立即以每小时21海里的速度沿直线前去追捕，问我舰艇应沿多大的方位角和需用多少小时才能在某处B追上敌舰？

（已知：$Sin21^\circ 47' = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，

$Sin\,38^\circ 13' = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

这两个数据可根据解题需要取用）



第七题　附图

解法一：

设我舰艇在某处B追上敌舰需用x小时，则在△ABC中，

$AB=21x$（海里），$BC=9x$(海里）

又$AC=10$（海里）

$\angle C=45^\circ+(180^\circ-105^\circ)=120^\circ$

根据正弦定理，得

$$\frac{21x}{\sin 120^\circ}=\frac{9x}{\sin A},$$

$$\therefore \sin A=\frac{9x}{21x}\sin 120^\circ=\frac{3}{7}\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\because \sin 21^\circ 47'=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

又A为锐角

$\therefore \angle A=21^\circ 47'$

所以所求的方位角是$45^\circ+21^\circ 47'=66^\circ 47'$.

$\angle B=180^\circ-120^\circ-21^\circ 47'=38^\circ 13'$

根据正弦定理，得

$$\frac{9x}{\sin 21^\circ 47'}=\frac{10}{\sin 38^\circ 13'}$$

$$\therefore x=\frac{10\cdot\sin 21^\circ 47'}{9\cdot\sin 38^\circ 13'}=\frac{10\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14}}{9\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}}=\frac{2}{3}\text{（小时）}$$

答：我舰艇应沿$66^\circ 47'$的方位角前去追捕，在某处B 追上敌舰需用$\frac{2}{3}$小时即40分钟。

解法二：

设我舰艇在某处B追上敌舰需用x小时，则在△ABC中，

$AB=21x$（海里），$BC=9x$（海里）

又$AC=10$（海里）

$\angle C=45^\circ+(180^\circ-105^\circ)=120^\circ$

根据正弦定理，得

$$\frac{21x}{\sin 120^\circ}=\frac{9x}{\sin A}$$

$$\therefore \sin A=\frac{9x}{21x}\cdot\sin 120^\circ=\frac{3}{7}\cdot\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\because \sin 21^\circ 47'=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

又A为锐角，

$\because \angle A=21^\circ 47'$

所以所求的方位角是$45^\circ+21^\circ 47'=66^\circ 47$

根据余弦定理，得

$$(21x)^2=10^2+(9x)^2-2\times 10\times(9x)\times \cos 120^\circ$$

整理，得

$$36x^2-9x-10=0$$

解这个方程，得

$$x_1=\frac{2}{3}, \quad x_2=-\frac{5}{12}，（不合题意，舍去）$$

答：（同解法一）

解法三：

设我舰艇在某处B追上敌舰需用x小时，则在△ABC中，

AB=21x（海里），BC=9x（海里）

又AC=10（海里）

$\angle C=45^\circ+(180^\circ-105^\circ)=120^\circ$

根据余弦定理得

$$(21x)^2=10^2+(9x)^2-2\times 10\times(9x)\times \cos 120^\circ$$

整理，得

$$36x^2-9x-10=0$$

解这个方程，得

$$x_1=\frac{2}{3}, \quad x_2=-\frac{5}{12}（不合题意，舍去）$$

$$\therefore \quad AB=21\times\frac{2}{3}=14（海里）$$

$$BC=9\times\frac{2}{3}=6（海里）$$

又根据余弦定理，得

$$\cos A=\frac{10^2+14^2-6^2}{2\times 10\times 14}=\frac{13}{14}$$

$$\because \quad \sin 21^\circ 47'=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\therefore \quad \cos 21^\circ 47'=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{13}{14}$$

$$\therefore \quad \angle A=21^\circ 47'$$

所以所求的方位角是$45^\circ+21^\circ 47'=66^\circ 47'$

答：（同解法一）

参考题答案

一、某生产队要建造一个已知体积为V的有盖圆柱形氨水池，问这个氨水池的高h和底面半径r取多大时，用料最省？

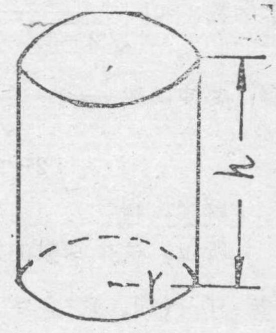
解：用料最省就是要求氨水池表面积最小

设氨水池的表面积为S，则

$$S=2\pi r^2+2\pi rh \qquad (1)$$

又$\because V=\pi r^2 h$

$$\therefore h=\frac{V}{\pi r^2} \qquad (2)$$



把（2）代入（1），便得到S为r的函数

$$S=S(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$$

下面讨论r和h取什么值时，S最小。

因为$S'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}$，而方程

$4\pi r-\frac{2V}{r^2}=0$只有一个实数根$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，

并从这个实际问题知道应有最小面积，所以

当$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=\frac{\sqrt[3]{4\pi^2V}}{2\pi}$时，S有最小值

这时相应的高为：

$$h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{2\pi r^3}{\pi r^2}=2r=\frac{\sqrt[3]{4\pi^2 v}}{\pi}$$

答：当氨水池的高$h=\frac{\sqrt[3]{4\pi^2 v}}{\pi}$，底面半径$r=\frac{\sqrt[3]{4\pi^2 v}}{2\pi}$，

即高和底面直径相等时，用料最省。

二、求$y=\operatorname{Sin}x$（x在〔0，π〕上）与x轴所围成的图形的面积

解：因为x在〔0，π〕上，$\operatorname{Sin}x\geqslant 0$

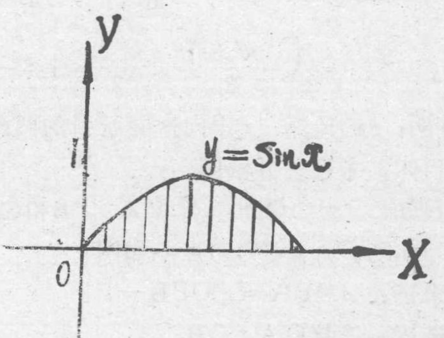
所以所求图形的面积是：

$$S=\int_0^{\pi}\operatorname{Sin}x\,dx$$

$$=-\operatorname{Cos}x\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\operatorname{Cos}\pi-(-\operatorname{Cos}0)$$

$$=1-(-1)=2$$



参考题二　附　图