陕西1977年高考数学试题解

一、求值：$\left(\frac{1}{300}\right)^{-\frac{1}{2}}+10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{4}}-10(2-\sqrt{3})^{-1}$

解：原式$=\sqrt{300}+\frac{10\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{2^2}}-\frac{10}{2-\sqrt{3}}$

$=10\sqrt{3}+15-10(2+\sqrt{3})$

$=-5$

二、求值：$\sin480°\cdot\cos480°\cdot\cos960°\cdot\cos1920°$

解：原式$=\sin120°\cdot\cos120°\cdot\cos240°\cdot\cos120°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{\sqrt{3}}{16}$

三、化简：$|6-a|-|2a+1|+\sqrt{a^2+10a+25}$，$(a<-5)$；

解：$\because a<-5$，$\therefore 6-a>0$、$2a+1<0$，$a+5<0$．

因此

$|6-a|-|2a+1|+\sqrt{a^2+10a+25}$

$=(6-a)+(2a+1)+\sqrt{(a+5)^2}$

$=(6-a)+(2a+1)-(a+5)=2$

四、解不等式：$\lg(2x+1)>\lg(5-x)$

解：由原不等式，得不等式组：

$$\begin{cases}2x+1>5-x\\2x+1>0\\5-x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \dfrac{4}{3} \\ x > -\dfrac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{4}{3} < x < 5$$

因此，原不等式的解是 $\dfrac{4}{3} < x < 5$

五、设A、B为锐角，且 $\sin A = \dfrac{3}{5}$，$\sin B = \dfrac{5}{13}$，求 $tg(A-B)$

解：∵ A、B为锐角，∴cosA、cosB均为正值

$$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \sqrt{1-\sin^2 B} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \quad tg(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \frac{\sin A\cos B - \cos A\sin B}{\cos A\cos B + \sin A\sin B}$$

$$= \frac{\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{12}{13} - \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{13}}{\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{12}{13} + \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{13}} = \frac{3\times12-4\times5}{4\times12+3\times5} = \frac{16}{63}$$

六、实数p、q应满足怎样的条件，才能使方程 $x^2+px+g=0$ 的两根成为一直角三角形两锐角的正弦？

解：设方程的两根为 x_1，x_2，直角三角形一个锐角为α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

依题意，得

$$x_1=\sin\alpha,\quad x_2=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$$

由韦达定理：

$$\sin\alpha+\cos\alpha=-p \quad (1)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=q \quad (2)$$

把(1)式平方

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=p^2$$

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha=p^2 \quad (3)$$

把(2)代入(3)，即得到p、g应满足的关系式

$$1+2q=p^2 \quad (4)$$

另外，根据(1)和(2)有

$$p=-(\sin\alpha+\cos\alpha)=-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)$$

$$=-\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$q=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha$$

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$， 所以

$$-\sqrt{2}\leqslant-\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)<-1$$

即 $-\sqrt{2}\leqslant p<-1$ （5）

$$0<\frac{1}{2}\sin 2\alpha\leqslant\frac{1}{2}$$

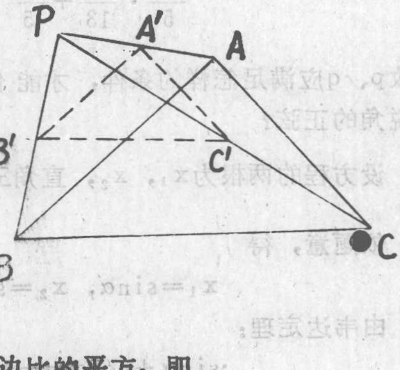
即 $0<q\leqslant\frac{1}{2}$ （6）

(4)、(5)、(6)是p、q必须满足的条件

∴ p、g应满足条件：$1+2q=p^2$，而且 $-\sqrt{2}\leqslant p<-1$，$0<q\leqslant\frac{1}{2}$，这时才能使方程 $x^2+px+g=0$ 的两根为一直角三角形两锐角的正弦。

七、以任意一点到已知三角形三个顶点连线的中点为顶点作三角形。所作三角形的面积是已知三角形的几倍？

解：如图，P为已知△ABC外任一点，A′，B′，C′分别是PA、PB、PC的中点，根据三角形中位线的性质，有



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{1}{2}$$

因此

$$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$$

那末，这两个三角形面积之比，等于对应边比的平方，即

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

即所作的三角形的面积是原三角形面积的 $\frac{1}{4}$

若P为已知△ABC内或边上任意一点，也有同样结果，详略。

八、求过椭圆$\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$的右侧的焦点，且与圆$x^2+y^2=3^2$相切的直线方程

解：∵半长轴$a=13$，半短轴$b=12$，$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$

因为椭圆右侧焦点的坐标是（5，0）

设过焦点（5，0）与圆相切的直线的切点为（x_1，y_1）．则切线方程为：

$$x_1x+y_1y=3^2 \qquad (1)$$

因为切线过焦点(5，0)，所以此点坐标适合方程（1），即

$$5x_1=9.$$

又因为切点（x_1，y_1）在圆上，所以

$$x_1^2+y_1^2=9$$

解方程组

$$\begin{cases}5x_1=9\\ x_1^2+y_1^2=9\end{cases}$$

得 $$\begin{cases}x_1=\frac{9}{5}\\ y_1=\pm\frac{12}{5}\end{cases}$$

代入(1)，得所求的切线方程是：

$$9x+12y-45=0\text{和}9x-12y-45=0$$

化简：

$$3x+4y-15=0 \quad \text{和} \quad 3x-4y-15=0$$

九、三角形的一内角为30°，它的一邻边长为4，对边长为$\frac{5}{2}$，求另一边长．

解：设另一边长为x，由余弦定理：

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2=x^2+4^2-2\cdot x\cdot 4\cos30^\circ$$

即

$$4x^2-16\sqrt{3}x+39=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{4\sqrt{3}\pm3}{2}$$

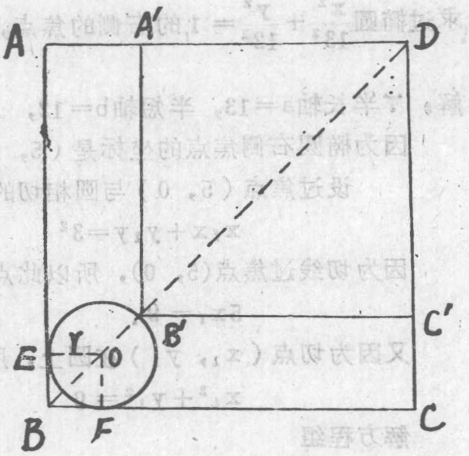
所以三角形另一边长为$\frac{4\sqrt{3}+3}{2}$或$\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$

十、在一块边长为a的正方形上，切着两边截去了一个半径为r的圆料（$r\leqslant\frac{(2-\sqrt{2})a}{4}$），

如果象图1那样截出一个正方形的料，它的面积为多大？如果象图2那样截出的一个正方形的料，它的面积为多大？这二种截法截下的正方形的料的面积哪个较大？

解：（1）如图1.

若⊙O与正方形ABCD的边AB、BC相切于E、F点，则OEBF为一正方形，圆心O在对角线BD上.


图一

∵正方形ABCD的边长为a，⊙O的半径为r.

$\therefore BD=\sqrt{2}a,\quad OB=\sqrt{2}r$

$B'D=BD-BB'$

$=\sqrt{2}a-(\sqrt{2}r+r)$

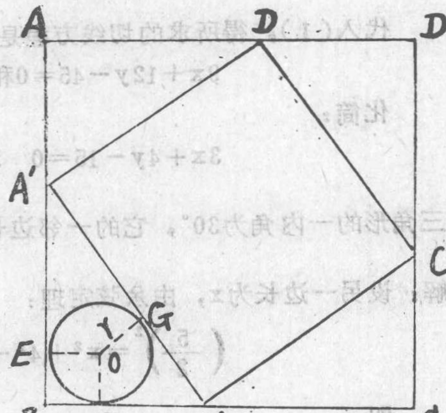
则截得正形A′B′C′D的面积

$$S_{A'B'C'D}=\frac{1}{2}B'D\sin 90^\circ=\frac{1}{2}[\sqrt{2}a-(\sqrt{2}r+r)]^2 \quad (图1)$$

$$=[a-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})r]^2 \quad (1)$$

（2）如图2

设⊙O与正方形ABCD的边AB、BC分别相切于E、F点；与正方形A′B′C′D′边A′B′相切于G点


图二

$\because A'B'=A'D'$

$\angle AD'A'=\angle BA'B'$（$\because A'B'\perp A'D'$、$AB\perp AD$）

$\therefore Rt\triangle AD'A'\cong Rt\triangle A'BB'$

则

$AA'=BB'=r+FB'$

又

$$A'G=A'E=AB-AA'-EB=a-(r+FB')-r=a-2r-FB' \quad (图2)$$

而 $B'G=B'F$

$\therefore A'B'=A'G+B'G=a-2r-FB'+FB'=a-2r$

则所截的正方形A′B′C′D′的面积

$$S_{A'B'C'D'}=(A'B')^2=(a-2r)^2 \quad (2)$$

$\because (1+\frac{\sqrt{2}}{2})r<2r$

$\therefore [a-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})r]^2>(a-2r)^2$

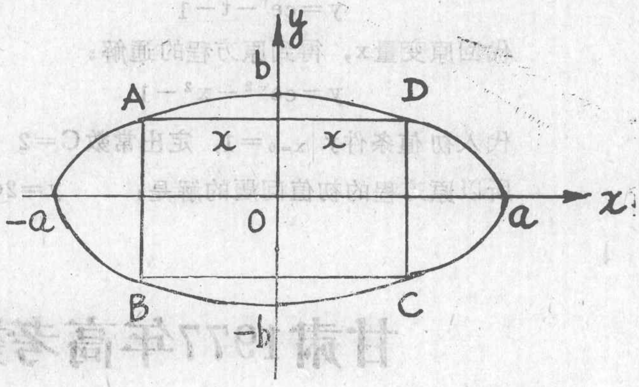
因此第一种截法（如图1）截下的正方形料的面积较大.

参考题：

一、在一个椭圆的所有内接矩形中，怎样的矩形面积最大？

解：设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



若内接矩形ABCD的长

$AD=2x$（如图）

则矩形的宽$CD=\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

这时矩形的面积

$$S(x)=\frac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$$

$$=\frac{4b}{a}\sqrt{x^2(a^2-x^2)}$$

$$\leqslant\frac{4b}{a}\left[\frac{x^2+(a^2-x^2)}{2}\right]$$

$$=2ab \quad （常数）$$

其中不等式中的等号，在$x^2=a^2-x^2$时成立，即$x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$时$S(x)$有最大值$2ab$.

这时$AD=2x=\sqrt{2}a$，$CD=\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{2}b$

答：当内接矩形的长和宽分别是椭圆的半长轴和半短轴的$\sqrt{2}$倍时，面积最大.

二、试解

$$\frac{dy}{dx}-2xy=2x^3, \qquad y\Big|_{x=0}=1$$

解：在方程两边同乘以$\frac{1}{x}$，

$$\frac{dy}{xdx}-2y=2x^2$$

$$\frac{dy}{dx^2}-y=x^2$$

令$x^2=t$，方程就化为

$$\frac{dy}{dt}-y=t \qquad (*)$$

方程（＊）是一个一阶常系数线性方程。其相应的齐次方程$\frac{dy}{dt}-y=0$的特征根是1．因此齐次线性方程的通解是

$$y=ce^{t}$$ （其中c是任意常数）

容易验证，$y=-t-1$是方程（*）的一个特解，因此方程（*）的通解是

$$y=ce^{t}-t-1$$

代回原变量x，得到原方程的通解：

$$y=ce^{x^2}-x^2-1$$

代入初值条件$y\big|_{x=0}=1$，定出常数$C=2$

所以原方程的初值问题的解是： $y=2e^{x^2}-x^2-1$