青海1977年高考数学试题解

一、计算：$\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\cdot(a\neq\pm b)$.

解：原式$=\dfrac{a(a+b)-b(a-b)+2ab}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{a^2+b^2+2ab}{(a-b)(a+b)}$

$=\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{a+b}{a-b}$

二、如图，AB是⊙O的直径，AC是⊙O的切线，连接BC与⊙O相交于D点，而且$\angle ABC=45^\circ$．求证$BD=DC$.

证明：连接AD.

$\because$ AB是直径，$\therefore\angle ADB=90^\circ$

又$\because\angle ABC=45^\circ$，$\therefore\angle BAD=45^\circ$，

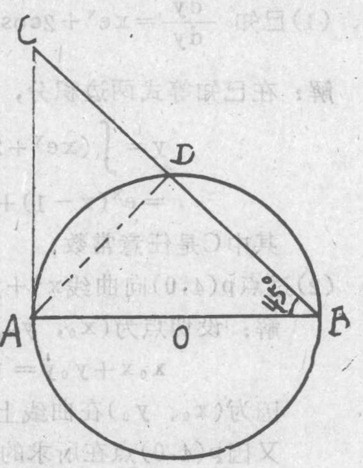
$\therefore BD=AD$.

$\because$ AC是切线，$\angle BAC=90^\circ$，

$\therefore\angle DAC=45^\circ$．而$\angle C=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

$\therefore DC=AD$.

从而得　$BD=DC$.



（第二题图）

三、已知长方体ABCD－A′B′C′D′的对角线AC′与A′C的夹角$\angle AoC=120^\circ$，底面边长$AB=4Cm$，$BC=3cm$．求此长方体的体积

解：$\because\angle AOC=120^\circ$，

$\therefore\angle COC'=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

又$\because co=c'o$　$\therefore\angle OCC'=\angle OC'C=60^\circ$

连接AC，在Rt$\Delta ACC'$中，

$\angle C'AC=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，

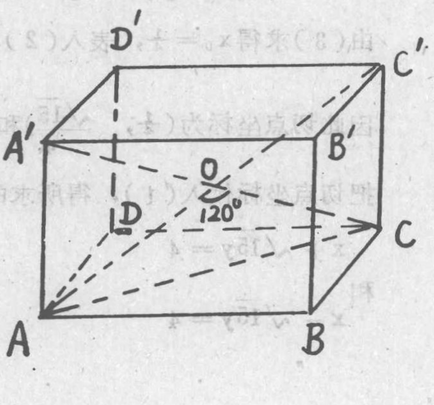
$\therefore AC'=2C'C$.

根据勾定理

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$(2C'C)^2-5^2=C'C^2$　　$3C'C^2=25$

$\therefore C'C=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}(cm)$



所以求得长方体的体积

$$V=AB\times BC\times C'C=4\times3\times\frac{5\sqrt{3}}{3}=20\sqrt{3}(cm^3)$$

答：长方体的体积为$20\sqrt{3}\ cm^3$

四、求下列函数的定义域：

1．$y=\dfrac{7x}{x+1}$

解：函数$y=\dfrac{7x}{x+1}$的定义域为：x不等于－1的任意实数．

2．$y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

解：$y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$的定义域为$x<2$的实数

五、化简：$\left(27a^{\frac{5}{2}}\sqrt{ab^{-\frac{1}{3}}\sqrt[4]{b^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$，　　$(b\neq0)$

解：原式$=\left[27a^{\frac{5}{2}}\left(ab^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}=\left[27a^{\frac{5}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}=(27a^3)^{\frac{1}{3}}=3a$

六、计算：$Lg14-2Lg\frac{7}{3}+Lg7-Lg18$

解：原式$=(Lg2+Lg7)-2(Lg7-Lg3)+Lg7-(2Lg3+Lg2)=0$

七、求$\sin435^\circ$的值．

解：$\sin435^\circ=\sin(360^\circ+75^\circ)=\sin75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$

$=\sin45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

八、当锐角θ为何值时，方程

$(3\sin\theta)x^2-(4\cos\theta)x+2=0$

有两个相等的实数根？并求出这个方程的实数根．

解：要使方程有两个相等的实数根，必须使其判别式为0．即

$(4\cos\theta)^2-8(3\sin\theta)=0$　　　　$16\cos^2\theta-24\sin\theta=0$．

$2\cos^2\theta-3\sin\theta=0$．　　　　$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta=0$．

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2=0$　　　　$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)=0$

$\therefore\sin\theta=\frac{1}{2}$或者$\sin\theta=-2$(不适合，舍去)．

已知θ是锐角，所以$\theta=30^\circ$．

这时，原方程就化为

$$\frac{3}{2}x^2-2\sqrt{3}x+2=0$$

或者写成$3x^2-4\sqrt{3}x+4=0$

即$(\sqrt{3}x-2)^2=0$

$\therefore x=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

答：当$\theta=30°$时，原方程有两个相等的实数根。这两个相等的实数根是$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

九、求经过抛物线$y^2=-2x$的焦点，且与直线$2x-y-1=0$垂直的直线方程。

解：抛物线$y^2=-2x$的焦点是$(-\frac{1}{2},0)$，直线$2x-y-1=0$的斜率为2，因此所求的直线过$(-\frac{1}{2},\ 0)$点，而且斜率为$-\frac{1}{2}$. 由点斜式直线方程可求得所求的直线是：

$y-0=-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})$ 即 $2x+4y+1=0$

十、今年，我省香日德农场春小麦亩产达1765.5斤，创全国春小麦亩产新记录，在大治之年作出了贡献。我省在1971年开始出现亩产1000斤的高产田. 从1971年的高产量1000斤到今年的创记录产量1765.5斤，平均每年的增长率是多少？

（已知$\mathrm{Lg}1.766=0.2470$，已知由$\mathrm{Lg}A=0.0412$得$A=1.100$）

解：设平均每年的增长率为x，则

$1000(1+x)^6=1765.5$ $(1+x)^6=1.7655\approx1.766$

$6\mathrm{Lg}(1+x)=\mathrm{Lg}1.766=0.2470$

$\therefore \mathrm{Lg}(1+x)=\frac{1}{6}\times0.2470=0.0412$ $1+x=1.100$,

$\therefore x=0.100\approx10.0\%$

答：平均每年的增长率约为10.0%

参考题·

一、若齐次线性方程组

$$\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ ax+a^2y+z=0\\ a^2x+y+az=0\end{cases}$$

有非零解，那末a应为何值？

解：齐次线性方程组有非零解，其充要条件是系数行列式等于0。

即要求
$$\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ a & a^2 & 1\\ a^2 & 1 & a\end{vmatrix}=0$$

而
$$\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ a & a^2 & 1\\ a^2 & 1 & a\end{vmatrix}=a^3+a^3+a^3-a^6-1-a^3=2a^3-a^6-1$$

$\therefore 2a^3-a^6-1=0$ $(a^3-1)^2=0$ $\therefore a=1$.

答：当$a=1$时，这个齐次线性方程组有非零解，

二. 试求由曲线$y=2\cos x$之一半被与$y=0$围成的面积绕ox轴旋转所产生的立体的体积。

解：所求的体积

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi y^2dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\pi\cos^2 x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\pi(1+\cos 2x)\,dx$$

$$=(2\pi x+\pi\sin 2x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2$$