

理科数学

1. 将多项式 $x^5y - 9xy^5$ 分别在下列范围内分解因式:

(1) 有理数范围;

(2) 实数范围;

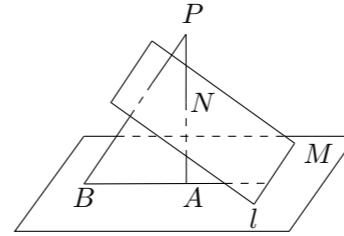
(3) 复数范围.

2. 半径为 1、2、3 的三个圆两两外切. 证明: 以这三个圆的圆心为顶点的三角形是直角三角形.

3. 用解析几何方法证明: 三角形的三条高线交于一点.

4. 证明对数换底公式: $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ (a, b, N 都是正数, $a \neq 1, b \neq 1$).

5. 直升飞机上一点 P 在地面 M 上的正射影是 A , 从 P 看地面上物体 B (不同于 A). 直线 PB 垂直于飞机窗玻璃所在的平面 N (如图). 证明: 平面 N 必与平面 M 相交, 且交线 l 垂直于 AB .



6. 设三角函数 $f(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right)$, 其中 $k \neq 0$.

(1) 写出 $f(x)$ 极大值 M 、极小值 m 与最小正周期 T ;

(2) 试求最小的正整数 k , 使得当自变量 x 在任意两个整数间 (包括整数本身) 变化时, 函数 $f(x)$ 至少有一个值是 M 与一个值是 m .

7. CD 为直角 $\triangle ABC$ 中斜边 AB 上的高, 已知 $\triangle ACD$ 、 $\triangle CBD$ 、 $\triangle ABC$ 的面积成等比数列, 求 $\angle B$ (用反三角函数表示).

8. 已知 $0 < \alpha < \pi$, 证明: $2 \sin \alpha \leq \cot \frac{\alpha}{2}$; 并讨论 α 为何值时等号成立.

9. 抛物线的方程是 $y^2 = 2x$, 有一个半径为 1 的圆, 圆心在 x 轴上运动. 问这个圆运动到什么位置时, 圆与抛物线在交点处的切线互相垂直.

(注: 设 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点, 则抛物线在 P 点处的切线斜率是 $\frac{p}{y_0}$).

附加题

10. 设直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = t \\ y = b + mt \end{cases}$ (t 是参数), 椭圆 E 的参数方程是

$\begin{cases} x = 1 + a \cos \theta, (a \neq 0) \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 是参数), 问 a, b 应满足什么条件, 使得对于任意 m 值来说, 直线 l 与椭圆 E 总有公共点.