

# 理科数学

1. 设  $A$  表示有理数的集合,  $B$  表示无理数的集合, 即设  $A = \{\text{有理数}\}$ ,  $B = \{\text{无理数}\}$ , 试写出:
- (1)  $A \cup B$ ;
  - (2)  $A \cap B$ .

2. 在  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四位候选人中,
- (1) 如果选举正、副班长各一人, 共有几种选法? 写出所有可能的选举结果;
  - (2) 如果选举班委三人, 共有几种选法? 写出所有可能的选举结果.

3. 下表所列各小题中, 指出  $A$  是  $B$  的充分条件, 还是必要条件, 还是充要条件, 或者都不是.

$A$	$B$	$A$ 是 $B$ 的什么条件
四边形 $ABCD$ 为平行四边形	四边形 $ABCD$ 为矩形	
$a = 3$	$ a  = 3$	
$\theta = 150^\circ$	$\sin \theta = \frac{1}{2}$	
点 $(a, b)$ 在圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上	$a^2 + b^2 = R^2$	

4. 写出余弦定理 (只写一个公式即可), 并加以证明.

5. 解不等式 ( $x$  为未知数): 
$$\begin{vmatrix} x-a & b & -c \\ a & x-b & c \\ -a & b & x-c \end{vmatrix} > 0.$$

6. 用数学归纳法证明等式:  $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$ . 对一切自然数  $n$  都成立.

7. 设 1980 年底我国人口以 10 亿计算.
- (1) 如果我国人口每年比上年平均递增 2%, 那么到 2000 年底将达到多少?
  - (2) 要使 2000 年底我国人口不超过 12 亿, 那么每年比上年平均递增率最高是多少?

下列对数值可供选用:		
$\lg 1.0087 = 0.00377$	$\lg 1.0092 = 0.00396$	$\lg 1.0096 = 0.00417$
$\lg 1.0200 = 0.00860$	$\lg 1.2000 = 0.07918$	$\lg 1.3098 = 0.11720$
$\lg 1.4568 = 0.16340$	$\lg 1.4859 = 0.17200$	$\lg 1.5157 = 0.18060$

8. 在  $120^\circ$  的二面角  $P-a-Q$  的两个面  $P$  和  $Q$  内, 分别有点  $A$  和点  $B$ , 已知点  $A$  和点  $B$  到棱  $a$  的距离分别为 2 和 4, 且线段  $AB = 10$ .
- (1) 求直线  $AB$  和棱  $a$  所成的角;
  - (2) 求直线  $AB$  和平面  $Q$  所成的角.

9. 给定双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ .
- (1) 过点  $A(2, 1)$  的直线  $L$  与所给的双曲线交于两点  $P_1$  及  $P_2$ , 求线段  $P_1P_2$  的中点  $P$  的轨迹方程;
  - (2) 过点  $B(1, 1)$  能否作直线  $m$ , 使  $m$  与所给双曲线交于两点  $Q_1$  及  $Q_2$ , 且点  $B$  是线段  $Q_1Q_2$  的中点? 这样的直线  $m$  如果存在, 求出它的方程; 如果不存在, 说明理由.

## 附加题

10. 已知以  $AB$  为直径的半圆有一个内接正方形  $CDEF$ , 其边长为 1 (如图). 设  $AC = a$ ,  $BC = b$ , 作数列  $u_1 = a - b$ ,  $u_2 = a^2 - ab + b^2$ ,  $u_3 = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3, \dots, u_k = a^k - a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 - \dots + (-1)^k b^k$ ; 求证:  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} (n \geq 3)$ .

