

理科数学

1. 填表:

	函数	使函数有意义的 x 的实数范围
1	$y = \sqrt{-x^2}$	
2	$y = \sqrt{(-x)^2}$	
3	$y = \arcsin(\sin x)$	
4	$y = \sin(\arcsin x)$	
5	$y = 10^{\lg x}$	
6	$y = \lg 10^x$	

2. (1) 求 $(-1 + i)^{20}$ 展开式中第 15 项的数值;

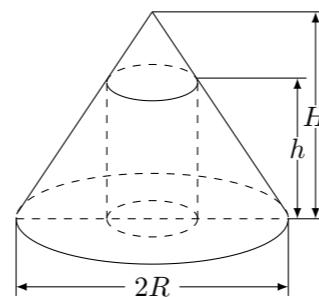
(2) 求 $y = \cos^2 \frac{x}{3}$ 的导数.

3. 在平面直角坐标系内, 下列方程表示什么曲线? 画出它们的图形.

(1)
$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 1 \\ -3y & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

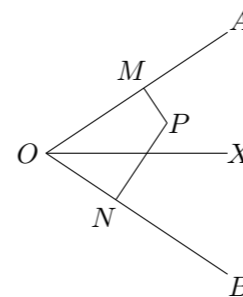
(2)
$$\begin{cases} x = 1 + \cos \varphi \\ y = 2 \sin \varphi \end{cases}.$$

4. 已知圆锥体的底面半径为 R , 高为 H , 求内接于这个圆锥体并且体积最大的圆柱体的高 h (如图).

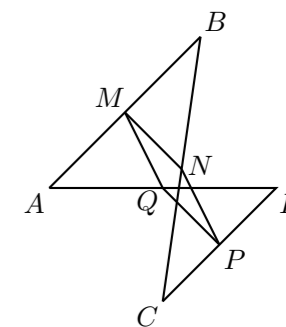


5. 设 $0 < x < 1, a > 0, a \neq 1$, 比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小. (要写出比较过程)

6. 如图: 已知锐角 $\angle AOB = 2\alpha$ 内有动点 $P, PM \perp OA, PN \perp OB$, 且四边形 $PMON$ 的面积等于常数 c^2 . 今以 O 为极点, $\angle AOB$ 的角平分线 OX 为极轴, 求动点 P 的轨迹的极坐标方程, 并说明它表示什么曲线.



7. 已知空间四边形 $ABCD$ 中 $AB = BC, CD = DA, M, N, P, Q$ 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点 (如图). 求证: $MNPQ$ 是一个矩形.



8. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的内接三角形有两边与抛物线 $x^2 = 2qy$ 相切, 证明这个三角形的第三边也与 $x^2 = 2qy$ 相切.

附加题

9. 已知数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 和数列 $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, 其中 $a_1 = p, b_1 = q, a_n = pa_{n-1}, b_n = qa_{n-1} + rb_{n-1} (n \geq 2)$, (p, q, r 是已知常数, 且 $q \neq 0, p > r > 0$).

(1) 用 p, q, r, n 表示 b_n , 并用数学归纳法加以证明;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$.