

# 理科数学

- 数集  $X = \{(2n+1)\pi, n \text{ 是整数}\}$  与数集  $Y = \{(4k \pm 1)\pi, k \text{ 是整数}\}$  之间的关系是 ( )  
 (A)  $X \subseteq Y$  (B)  $X \supseteq Y$  (C)  $X = Y$  (D)  $X \neq Y$
- 如果圆  $x^2 + y^2 + Gx + Ey + F = 0$  与  $x$  轴相切于原点, 那么 ( )  
 (A)  $F = 0, G \neq 0, E \neq 0$  (B)  $E = 0, F = 0, G \neq 0$   
 (C)  $G = 0, F = 0, E \neq 0$  (D)  $G = 0, E = 0, F \neq 0$
- 如果  $n$  是正整数, 那么  $\frac{1}{8}[1 - (-1)^n](n^2 - 1)$  的值 ( )  
 (A) 一定是零 (B) 一定是偶数  
 (C) 是整数但不一定是偶数 (D) 不一定是整数
- $\arccos(-x)$  大于  $\arccos x$  的充分条件是 ( )  
 (A)  $x \in (0, 1]$  (B)  $x \in (-1, 0)$  (C)  $x \in [0, 1]$  (D)  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
- 如果  $\theta$  是第二象限角, 且满足  $\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin \theta}$ , 那么  $\frac{\theta}{2}$  ( )  
 (A) 是第一象限角  
 (B) 是第三象限角  
 (C) 可能是第一象限角, 也可能是第三象限角  
 (D) 是第二象限角
- 已知圆柱的侧面展开图是边长为 2 与 4 的矩形, 求圆柱的体积.
- 函数  $\log_{0.5}(x^2 + 4x + 4)$  在什么区间上是增函数?
- 求方程  $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{2}$  的解集.
- 求  $\left(|x| + \frac{1}{|x|} - 2\right)^3$  的展开式中的常数项.

10. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^n}{3^n + 1}$  的值.

11. 要排一张有 6 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的演出节目单, 任何两个舞蹈节目不得相邻, 问有多少种不同的排法 (只要求写出式子, 不必计算).

12. 设  $H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ , 画出函数  $y = H(x-1)$  的图象.

13. 画出极坐标方程  $(\rho - 2)\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$  ( $\rho > 0$ ) 的曲线.

14. 已知三个平面两两相交, 有三条交线. 求证: 这三条交线交于一点或互相平行.

15. 设  $c, d, x$  为实数,  $c \neq 0, x$  为未知数. 讨论方程  $\log_{(cx + \frac{d}{x})} x = -1$  在什么情况下有解, 有解时求出它的解.

16. 设  $p \neq 0$ , 实系数一元二次方程  $z^2 - 2pz + q = 0$  有两个虚数根  $z_1, z_2$ . 再设  $z_1, z_2$  在复平面内的对应点是  $Z_1, Z_2$ . 求以  $Z_1, Z_2$  为焦点且经过原点的椭圆的长轴的长.

17. 求经过定点  $M(1, 2)$ , 以  $y$  轴为准线, 离心率为  $\frac{1}{2}$  的椭圆的左顶点的轨迹方程.

18. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A, \angle B, \angle C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $c = 10, \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ ,  $P$  为  $\triangle ABC$  的内切圆上的动点. 求点  $P$  到顶点  $A, B, C$  的距离的平方和的最大值与最小值.

19. 设  $a > 2$ , 给定数列  $\{x_n\}$ , 其中  $x_1 = a, x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

求证:

- $x_n > 2$ , 且  $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ );
- 如果  $a \leq 3$ , 那么  $x_n \leq 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ );
- 如果  $a > 3$ , 那么当  $n \geq \frac{\lg \frac{a}{3}}{\lg \frac{3}{4}}$  时, 必有  $x_{n+1} < 3$ .

20. 如图, 已知圆心为  $O$ 、半径为 1 的圆与直线  $l$  相切于点  $A$ , 一动点  $P$  自切点  $A$  沿直线  $l$  向右移动时, 取  $\widehat{AC}$  的长为  $\frac{2}{3}AP$ , 直线  $PC$  与直线  $AO$  交于点  $M$ . 又知当  $AP = \frac{3\pi}{4}$  时, 点  $P$  的速度为  $v$ , 求这时点  $M$  的速度.

