附录七、一九八五年广东省高考数学(文史类)试题与解答

·试　题·

卷　一

一、（本题满分20分）本题共有10个小题，每个小题有用横线表示的空位，请把你认为合适的内容写在横线上方的空位里。每个小题满分 2 分。

（1）$\log_3 5\cdot\log_5 9$ 的值等于__________。

（2）设数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=8$，且满足 $a_n=2a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，则 a_4 的数值是__________。

（3）复数$\sqrt{3}-i$ 的三角形式是__________。

（4）如果 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x^2}$，则 $f(x)=$__________。

（5）如果一个圆锥底面的半径增大到原来的 3 倍，但要保持它的体积不变，则其高必须缩小到原来的________。

（6）$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$的值等于________。

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{n(n+1)}$的值等于________。

（8）在一个长方体中，和其中一条确定的棱相垂直的棱的总数是__________条。

(9) 双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的两条渐近线所夹的锐角的大小是________弧度。

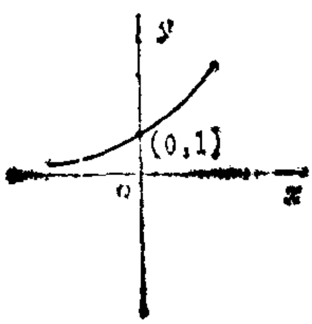
(10) 函数 $y=\sin^2(2x)$ 的最小正周期是________。

二、（本题满分45分）本题共有15个小题，每个小题都给出代号为A、B、C、D、E 的五个结论，其中只有一个结论是正确的，请把正确结论的代号写在下表该题号下的空格内（每个小题选对得3分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律得0分）：

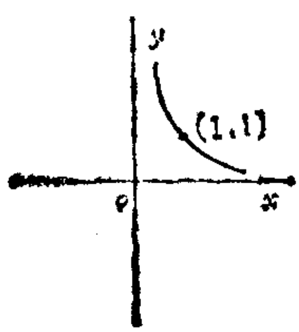
题　　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
答　　案															

(1) 函数 $y=2^{-x}$ 的图象的大致形状是

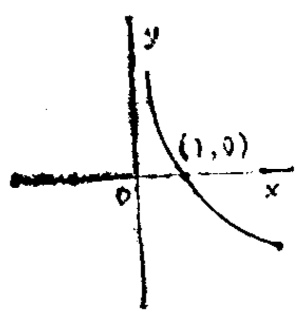
(A)



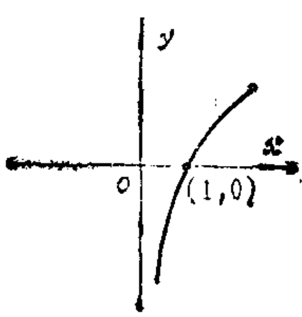
(B)



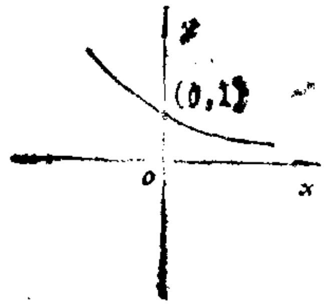
(C)



(D)



(E)



(2) 函数 $y=\sqrt{\lg(1-x)}$ 的定义域是

(A) $(-\infty, +\infty)$;　　(B) $(-\infty, 0]$;

(C) $(-\infty, 0)$;　　(D) $(-\infty, 1]$;

(E) $(-\infty, 1)$.

(3) 以 $A(1, 3)$、$B(-5, 1)$ 为端点的线段的垂直平分线的方程是

(A) $3x-y+8=0$;　　(B) $3x+y+8=0$;

(C) $2x-y-6=0$;　　(D) $2x+y+2=0$;

(E) $3x+y+4=0$.

(4) 下列不等式中，成立的是

(A) $\sin\frac{3\pi}{8}<\sin\frac{7\pi}{8}$;　　(B) $\cos\frac{3\pi}{8}<\cos\frac{7\pi}{8}$;

(C) $\csc\frac{3\pi}{8}<\csc\frac{7\pi}{8}$;　　(D) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}<\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{8}$;

(E) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}<\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$.

(5) 下列函数中，为奇函数的是

(A) x^2+x^3;　　(B) $\log_2 x$;　　(C) $\sin x+1$;

(D) $\sqrt[3]{x}$;　　(E) $|x|^3$.

(6) 已知 $180°<\alpha<270°$，且 $\sin(270°+\alpha)=\frac{4}{5}$，则

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$

(A) 3;　　(B) 2;　　(C) -2;

(D) -3;　　(E) $-\frac{1}{3}$.

(7) $y=x^2(x\leqslant 0)$ 的反函数是

(A) $y=\sqrt{x}$；　　　　(B) $y=\pm\sqrt{x}$；

(C) $y=-\sqrt{x}$；　　　　(D) $y=\sqrt{-x}$；

(E) $y=-\sqrt{-x}$。

(8) 设$R=\{$实数$\}$、$M=\{$纯虚数$\}$、$C=\{$复数$\}$，其中C是全集，则

(A) $R\cup\overline{R}=C$；　　　　(B) $\overline{M}\cup R=C$；

(C) $M\cup R=C$；　　　　(D) $M\cap R=\{0\}$；

(E) $C\cap\overline{R}=M$。

(9) 设向量$\overrightarrow{OZ}$对应于复数$-2\sqrt{3}+4i$。把$\overrightarrow{OZ}$按顺时针方向旋转60° 得到$\overrightarrow{OZ_1}$，则与向量$\overrightarrow{OZ_1}$对应的复数是

(A) $-3\sqrt{3}-i$；　　　　(B) $\sqrt{3}+5i$；

(C) $-2\sqrt{3}-4i$；　　　　(D) $2\sqrt{3}+4i$；

(E) $1+3\sqrt{3}i$。

(10) 某班上午要上语文、数学、体育、外语四门课，其中体育老师因故不能上第一节和第四节，则不同排课方案的种数是

(A) 10；　　(B) 12；　　(C) 20；

(D) 22；　　(E) 24。

(11) $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式中常数项是

(A) 1；　　(B) 6；　　(C) 15；

(D) 20；　　(E) 30。

(12) 不等式$|2x-3|>3$的解集是

(A) $\{x|x>3\}$；　　　　(B) $\{x|x<0\}$；

(C) $\{x|x>3$且$x<0\}$；　　(D) $\{x|x>3$或$x<0\}$；

(E) $\{x|0<x<3\}$。

(13) 已知圆的方程为 $x^2+y^2-2x+6y+8=0$，那么通过圆心的一条直线的方程是

(A) $2x-y+1=0$； (B) $2x+y+1=0$；

(C) $2x-y-1=0$； (D) $2x+y-1=0$；

(E) $y-2x+2=0$。

(14) 已知椭圆的焦点是(1, 0)和(-3, 0)，且短半轴长为3，则椭圆的方程是

(A) $\frac{(x+1)^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$； (B) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$；

(C) $\frac{(x-1)^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$； (D) $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{y^2}{13}=1$；

(E) $\frac{x^2}{13}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$。

(15) 在空间中，可以确定一个平面的条件是

(A) 两两相交的三条直线；

(B) 三条直线，其中的一条直线与另外两条直线分别相交；

(C) 三个点；

(D) 三条直线，它们两两相交，但不交于同一点；

(E) 两条直线。

卷 二

一、（本题满分13分）

证明 $\frac{\text{tg}(\alpha+\beta)-\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}\beta\,\text{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{\sin 2\beta}{2\cos^2\alpha}$。

二、（本题满分14分）

用数学归纳法证明：

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$$ （n为自然数）。

三、（本题满分14分）

已知椭圆C和直线l的直角坐标方程分别为：

C：　$x^2+2y^2-8=0$，

l：　$y=x-2$。

（1）证明椭圆C的一个焦点和短轴的一个端点落在直线l上。

（2）求直线l被椭圆C所截得线段的长度。

（3）如果动点p至坐标原点的距离与点p至直线l的距离相等，那么动点p的轨迹是什么曲线？请推导出它的方程。

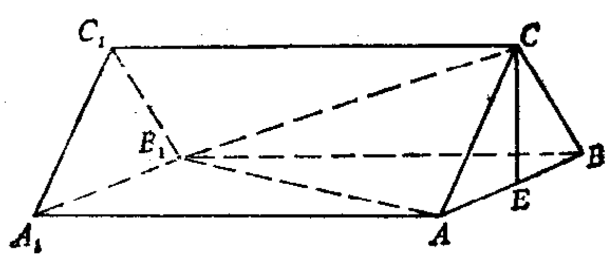
四、（本题满分14分）

已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱$AA_1=4$cm，它的底面$\triangle ABC$中有$AC=BC=2$cm，$\angle C=90°$，E是AB的中点。

（1）求证：$CE\perp AB_1$。

（2）求证：CE和AB_1所在的异面直线的距离等于$\frac{2\sqrt{3}}{3}$cm。

（3）设截面ACB_1与侧面ABB_1A_1所成较小的二面角为α，试求$\cos\alpha$的值。



·解　答·

说明：

一、每道试题解答前都指出试题要考查的主要知识和能力。如果考生的解法与下面提供的解答不同，可根据试题主要考查内容及评分标准进行评分（其细则可根据解答中评分标准的精神来制定）。

二、评阅试卷，要坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅，当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一道题的内容和难度时，可视影响的程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半；如果有较严重的概念性错误，就不给分。

三、为了阅卷方便，本试题解答中的推导步骤写得较为详细。考生在解题过程中，允许合理省略非关键性的推导步骤。

四、以下解答中右端所注的分数，表示正确做到这一步应得的累加分数。

五、给分或扣分都以1分为单位。

卷一的解答：

一、本题考查基础知识和基本运算。

每一个小题，结果正确的，给2分。10个小题的给分之和就是本题的给分。

(1) 2。

(2) 64。

(3) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

注：幅角没有采用主值，但结果正确的，同样给满分。

(4) $\frac{x}{x^2-1}$.　　(5) $\frac{1}{9}$.

(6) 0　　(7) $\frac{3}{2}$.

(8) 8.　　(9) $\frac{\pi}{3}$.

注：把结果写成60°的，扣1分。

(10) $\frac{\pi}{2}$.

二、本题考查基础知识和基本运算。

每一个小题，选对给3分，不选、选错或者选出的代号超过一个的，一律给0分。

15个小题的给分之和就是本题全题的给分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
答案	E	B	E	C	D	D	C	A	B	B	C	D	B	A	D

卷二的解答及评分标准：

一　本题考查三角函数公式及证明三角恒等式的能力。

【证法一】

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}\qquad(4\text{ 分})$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}\ \beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}^2\beta}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\beta(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{1+\mathrm{tg}^2\beta}\qquad(6\text{分})$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\beta}}$$

$$=\frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha}\qquad(10\text{分})$$

$$=\frac{\sin^2\beta}{2\cos^2\alpha}.\qquad(12\text{分})$$

【证法二】

$$\frac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}\qquad(4\text{分})$$

$$=\frac{\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta\cos(\alpha+\beta)}}$$

$$=\frac{\cos\beta[\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)]}{\cos\alpha[\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\sin\beta\sin(\alpha+\beta)]}$$

(6 分)

$$=\frac{\cos\beta\sin\beta}{\cos\alpha\cos\alpha}\qquad(10\text{分})$$

$$=\frac{\sin2\beta}{2\cos^2\alpha}.\qquad(12\text{分})$$

二、本题考查应用数学归纳法进行证明的能力。

【证】（1）当 $n=1$时，左边$=1=$右边，所以原等式成立。（2分）

（2）假设当 $n=k(k\geqslant 1)$时等式成立，即

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(4k^2-1).\quad（4分）$$

那么，当 $n=k+1$时

$$\begin{aligned}&1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2\\&=\frac{1}{3}k(4k^2-1)+(2k+1)^2\\&=\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)+(2k+1)^2\\&=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)\\&=\frac{1}{3}(2k+1)(k+1)(2k+3)\\&=\frac{1}{3}(k+1)\left[4(k+1)^2-1\right].\end{aligned}\quad（9分）$$

这就是说，原等式对于 $n=k+1$ 也成立。（10分）

根据(1)和(2)，原等式对于任何自然数 n 都成立。（12分）

三、本题考查直线和二次曲线的基础知识及求轨迹方程的能力。

解出每个小题给5分，可以独立给分。

（1）【解法一】将椭圆C的方程化为标准形式

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,$$

得知椭圆的中心为坐标原点，短轴在y轴上，长半轴长 $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，短半轴长 $b=\sqrt{4}=2$，所以，半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{8-4}=2$，从而，两个焦点的坐标分别为$(2,0)$和$(-2,0)$，又短轴两个端点的坐标分别为$(0,2)$和$(0,-2)$。（4分）

由直线l的方程$y=x-2$可知，当$x=2$时$y=0$，当$x=0$时$y=-2$，即椭圆C的焦点$(2,0)$与短轴的端点$(0,-2)$都在直线l上。（5分）

【解法二】同〔解法一〕至$(0,2)$和$(0,-2)$。（4分）

由点$(2,0)$与$(0,-2)$所确定的直线的方程为

$$\frac{y-0}{-2-0}=\frac{x-2}{0-2},$$

即

$$y=x-2.$$

这就是直线l的方程，所以，椭圆C的焦点$(2,0)$与短轴的端点$(0,-2)$都在直线l上。（5分）

(2)【解】解方程组

$$\begin{cases} x^2+2y^2-8=0, \\ y=x-2. \end{cases}$$

消去y，得

$$x^2+2(x-2)^2-8=0,$$

$$3x^2-8x=0,$$

解得

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{8}{3}.$$

从而

$$y_1=-2,\quad y_2=\frac{2}{3}.$$

即直线 l 被椭圆 C 所截得的线段的端点坐标为 $(0,-2)$ 与 $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$，该线段长为

$$\sqrt{\left(\frac{8}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}+2\right)^2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}. \qquad (10分)$$

(3) 【解】由于动点 P 到坐标原点和到直线 l 的距离相等，可知动点 P 的轨迹是一条抛物线。 (12分)

设动点 P 的坐标为 (x, y)，依题意有

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|y-x+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}.$$

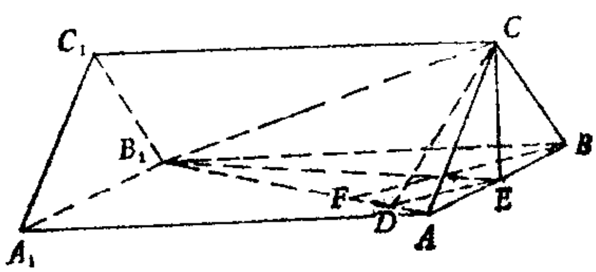
两边平方，得

$$(x^2+y^2)=\frac{1}{2}(y^2+x^2+4-2xy+4y-4x),$$

即 $\qquad x^2+y^2+2xy+4x-4y-4=0.$

这就是所求的轨迹方程。 (15分)

四、本题考查空间的两条直线的位置关系，二面角大小的计算，以及空间想象能力和逻辑推理能力。



证出第(1)小题给 5 分。

证出第(2)小题给 6 分。

解出第(3)小题给 5 分。

(1) 【证法一】

∵ $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

∴ $AA_1\perp$底面 ABC。　　　　　　　　　　（1分）

∵ $CE\subset$平面 ABC，

∴ $CE\perp AA_1$。

又 E是等腰三角形ABC底边AB的中点，

∴ $CE\perp AB$，

故 $CE\perp$平面 ABB_1A_1。　　　　　　　　　　（4分）

∵ $AB_1\subset$平面 ABB_1A_1，

∴ $CE\perp AB_1$。　　　　　　　　　　（5分）

【证法二】

∵ $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

∴ 侧面 $ABB_1A_1\perp$底面 ABC。　　　　　　　　　　（1分）

又 E是等腰三角形ABC底边AB的中点，

∴ $CE\perp AB$，

故 $CE\perp$平面 ABB_1A_1。　　　　　　　　　　（4分）

∵ $AB_1\subset$平面 ABB_1A_1，

∴ $CE\perp AB_1$。　　　　　　　　　　（5分）

【证法三】

∵ E是等腰三角形 ABC 底边AB的中点，

∴ $CE\perp AB$。　　　　　　　　　　（1分）

∵ $ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，

∴ $BB_1\perp$底面 ABC。　　　　　　　　　　（2分）

又 AB是AB_1在底面ABC上的射影，根据三垂线定理有$CE\perp AB_1$。　　　　　　　　　　（5分）

（2）【证法一】

∵ $CE\perp AB$，$CE\perp AB_1$，

∴ $CE\perp$平面 ABB_1A_1。

过E作 $ED\perp AB_1$，垂足为D，$AB\subset$平面 ABB_1A_1，

$\therefore \quad CE \perp ED$，

故 ED 是 CE 和 AB_1 所在的异面直线的距离。（7分）

在 $Rt\triangle ABB_1$ 和 $Rt\triangle ADE$ 中，$\angle A$ 公共，

$\therefore \quad \triangle ABB_1 \backsim \triangle ADE$，

$\therefore \quad \dfrac{ED}{BB_1} = \dfrac{AE}{AB_1}$，即 $ED = \dfrac{AE \cdot BB_1}{AB_1}$。（8分）

$\because \quad AC = BC = 2$，$\angle ACB = 90°$，

$\therefore \quad AB = 2\sqrt{2}$，$AE = \dfrac{1}{2}AB = \sqrt{2}$。

又 在 $Rt\triangle ABB_1$ 中，$BB_1 = 4$，

$\therefore \quad AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$，

$\therefore \quad ED = \dfrac{\sqrt{2} \cdot 4}{2\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(cm)$。（11分）

【证法二】

同【证法一】至 ED 是 CE 和 AB_1 所在的异面直线的距离。（7分）

过 B 作 $BF \perp AB_1$，垂足为 F，

则 $ED \parallel BF$，又 E 是 AB 的中点，

$\therefore \quad ED = \dfrac{1}{2}BF$。

在 $Rt\triangle ABB_1$ 中，$BF \cdot AB_1 = AB \cdot BB_1$，

即 $BF = \dfrac{AB \cdot BB_1}{AB_1}$。（9分）

$\because \quad AC = BC = 2$，$\angle ACB = 90°$，$\therefore \quad AB = 2\sqrt{2}$。

又 $BB_1 = 4$，

$$AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+4^2}=2\sqrt{6},$$

故 $$ED=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot 4}{2\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(cm).$$

(11分)

(3) 【解法一】

∵ $ED\perp AB_1$，$CE\perp$侧面 ABB_1A_1，连结 CD，根据三垂线定理有 $CD\perp AB_1$，

故 $\angle CDE$ 是截面 CAB_1 和侧面 ABB_1A_1 所成的较小的二面角的平面角. (13分)

CE 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边上的中线，故 $CE=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}$.

又 $ED=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，于是在 $Rt\triangle CED$ 中，

$$\operatorname{tg}\angle CDE=\frac{CE}{ED}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

即 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$，又 α 为锐角，

∴ $\sec\alpha=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sqrt{1+\frac{6}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$,

∴ $\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{\sqrt{10}}{5}$. (16分)

【解法二】

∵ $CE\perp$侧面积 ABB_1A_1

∴ $\triangle CAB_1$ 在侧面上的射影是 $\triangle EAB_1$.

设 $\triangle CAB_1$ 的面为 S_1，$\triangle EAB_1$ 的面积为 S_2，

则有 $S_2 = S_1 \cdot \cos\alpha$ （12分）

在 $Rt\triangle CBB_1$ 中，$B_1C = \sqrt{BB_1^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$，

又 $AB_1 = 2\sqrt{6}$，$AC = 2$，

$$\therefore \quad S_1 = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{5}-1)} \cdot \sqrt{(1+\sqrt{6}-\sqrt{5})(1-\sqrt{6}+\sqrt{5})} = 2\sqrt{5},$$

$$S_2 = \frac{1}{2}AB_1 \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{2}. \quad （15分）$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \quad （16分）$$