1985年广东省高等学校招生统一考试数学（理工农医类）

第一卷

考生注意：这份试题共两道大题，满分 64 分.

一、（本题满分 20 分）本题共有 10 个小题，第 1 至 9 题有用横线表示的空位，请把你认为合适的内容填在横线上方的空位里，第 10 题是画图题．每个小题满分 2 分．

1．函数 $y=\sqrt{\operatorname{arctg}(1-x)}$ 的定义域是________．

2．如果 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1-x^2}$，则 $f(x)=$________．

3．如果一个圆锥底面的半径增大到原来的三倍，但要保持它的体积不变，则其高必须缩小到原来的________．

4．在直角坐标系中，通过点（0,0）$(1,0)$ 和 $(0,2)$ 的圆的方程是________．

5． $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}+\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5}+\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{5}+\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{5}$ 的值等于________．

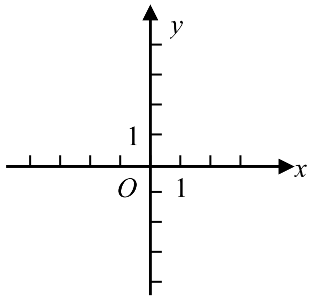
6． $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{n(n+1)}$ 的值等于________．

7．函数 $y=\sin^2(2x)$ 的最小正周期是_______．

8．已知函数 $f(x)=ax^5+\operatorname{arctg}x$，其中 a 为常数，且 $f(2)=10$，则 $f(-2)$ 的值是________．

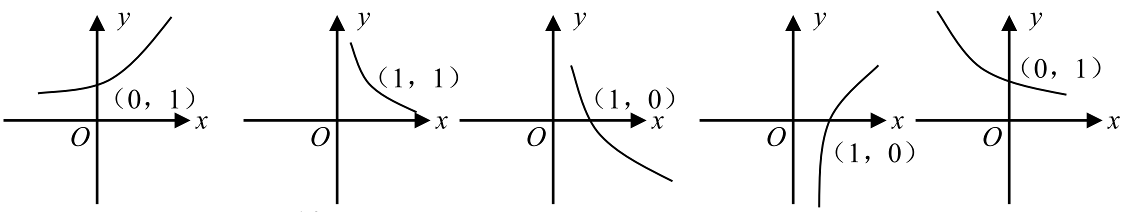
9．已知圆的方程为 $x^2+(y-2)^2=9$，用平行于 x 轴的直径把圆分为上下半圆，则以上半圆弧（包括端点）为图象的函数表达式是_________．

10．请把方程 $y\sqrt{x}-y-2x+2\sqrt{x}=0$ 所表示的曲线画在右边的直角坐标系中．



二、（本题满分 44 分）本题共有 20 个小题，每一个小题都给出代号为 A，B，C，D，E 的五个结论，其中只有一个结论是正确的，请把正确结论的代号写在下表该题号下的空格内第 1 至 16 小题，每个小题选对得 2 分，其余每个小题选对得 3 分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律得 0 分：

1．数 $y=2^{-x}$ 的图象的大致形状是（　　）



A．　B．　C．　D．　E．

2．极坐标方程 $\rho=\dfrac{10}{5-3\cos\theta}$ 所表示的曲线是（　　）

A．椭圆　　B．圆　　C．双曲线　　D．抛物线　　E．双曲线的一支

3．以 $A(1,3)$，$B(-5,1)$ 为端点的线段的垂直平分线的方程是（　　）

A． $3x-y+8=0$　　　B． $3x+y+4=0$

C． $2x-y-6=0$　　D． $2x+y+2=0$　　E． $3x+y+8=0$

4．如果双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的两条渐近线互相垂直，则双曲线的离心率是（　　）

A． $\sqrt{2}$　　B． 2　　C． $\sqrt{3}$　　D． $2\sqrt{2}$　　E． $\frac{3}{2}$

5．设集合$C=\{$复数$\}$，R={实数}，M={纯虚数}，其中 C 为全集，则（　　）

A． $M\cup R=C$　　B． $\overline{M}\cup R=C$　　C． $R\cup\overline{R}=C$

D． $M\cap R=\{0\}$　　E． $C\cap\overline{R}=M$

6． $y=x^2(x\leqslant 0)$的反函数是（　　）

A． $y=\sqrt{x}$　　B． $y=\pm\sqrt{x}$　　C． $y=-\sqrt{x}$

D． $y=\sqrt{-x}$　　E． $y=-\sqrt{-x}$

7．如果$y=\log_{(a^2-1)}x$在$(0,+\infty)$内是减函数，则a的取值范围是（　　）

A． $|a|>1$　　B． $|a|<\sqrt{2}$　　C． $a>\sqrt{2}$

D． $a<-\sqrt{2}$　　E． $1<|a|<\sqrt{2}$

8．如果n是正偶数，则$C_n^0+C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^n=$（　　）

A． 2^n　　B． 2^{n-1}　　C． 2^{n-2}　　D． $(n-1)2^{n-1}$　　E． $(n-1)2^{n-2}$

9．已知$180^\circ<\alpha<270^\circ$，且$\sin(270^\circ+\alpha)=\frac{4}{5}$，则$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=$（　　）

A．3　　B．2　　C． -2　　D． -3　　E． $-\frac{1}{3}$

10．方程$\sin 3x-\sin x=0$的解集是（　　）

A． $\{x\mid x=k\pi$，k是整数$\}$

B． $\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k$是整数$\}$

C． $\{x\mid x=k\pi$或$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k$是整数$\}$

D． $\{x\mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k$是整数$\}$

E． $\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}$，k是整数$\}$

11． $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$，$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right)$，$\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$的大小关系是（　　）

A． $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right) < \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$

B． $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) < \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right)$

C． $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right) < \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) < \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$

D． $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right) < \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) < \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$

E． $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) < \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right)$

12．设向量$\overrightarrow{OZ}$对应于复数$-2\sqrt{3}+4i$，把$\overrightarrow{OZ}$按顺时针方向旋转60°得到$\overrightarrow{OZ_1}$，则与向量$\overrightarrow{OZ_1}$对应的复数是（　　）

A． $-3\sqrt{3}-i$　　B． $\sqrt{3}+5i$　　C． $-2\sqrt{3}-4i$

D． $2\sqrt{3}+4i$　　E． $1+3\sqrt{3}i$

13．某班上午要上语文、数学、体育和外语四门课，又体育老师因故不能上第一节和第四节，则不同排课方案的种数是（　　）

A．24　　B．22　　C．20　　D．12　　E．10

14．$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式的常数项是（　　）

A．1　　B．6　　C．15　　D．20　　E．30

15．已知$\{a_n\}$为等差数列，且有$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=48$，则$a_6+a_7=$（　　）

A．12　　B．16　　C．20　　D．24　　E．28

16．直角三角形ABC的斜边BC在平面α内，顶点A在平面α外，则$\triangle ABC$的两条直角边在平面α上的射影与斜边BC所组成的图形只能是（　　）

A．一条线段

B．一个锐角三角形

C．一个钝角三角形

D．一条线段或一个钝角三角形

E．一条线段或一个锐角三角形

17．如果实数x与y满足方程$x+y-4=0$，则x^2+y^2的最小值是（　　）

A．4　　B．6　　C．8　　D．10　　E．12

18．和y轴相切，且和半圆$x^2+y^2=4(0\leqslant x\leqslant 2)$相内切的动圆圆心的轨迹方程是（　　）

A． $y^2=-4(x-1)(0<x\leqslant 1)$　　B． $y^2=4(x-1)(0<x\leqslant 1)$

C． $y^2=4(x+1)(0<x\leqslant 1)$　　D． $y^2=-2(x-1)(0<x\leqslant 1)$

E．$y^2=2(x+1)(0<x\leqslant 1)$

19．设a，b，c是空间中的三条直线，下面给出四个命题：

①如果$a\perp b$，$b\perp c$，则$a\parallel c$．

②如果a，b是异面直线，b，c是异面直线，则a，c也是异面直线.

③如果a和b相交，b和c相交，则a和c也相交.

④如果a和b共面，b和c共面，则a和c也共面.

那么，在上述命题中，真命题的个数是（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1　　E．0

20．棱柱成为直棱柱的一个必要但不充分的条件是（　　）

A．棱住有一条侧棱与底面垂直

B．棱柱有一条侧棱与底面的两条边垂直

C．棱住有一条侧面与底面的一条边垂直

D．棱住有一条侧面是矩形，且它与底面垂直

E．棱住有两个相邻的侧面互相垂直

第二卷

考生注意：这份试题共四道大题，满分 56 分，第五题是附加题，满分 10 分，不计入总分.

一、（本题满分 14 分）

用数学归纳法证明：$|\sin n\theta|\leqslant n|\sin\theta|$.（$n$是自然数）

二、（本题满分 14 分）

已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱$AA_1=4\text{cm}$，它的底面$\triangle ABC$中有$AC=BC=2\text{cm}$，$\angle C=90^\circ$，E是AB的中点.

（1）求证：$CE\perp AB_1$.

（2）求证：CE和AB_1所在的异面直线的距离等于$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\text{cm}$.

（3）求截面ACB_1与侧面ABB_1A_1所成的二面角的大小（只求其中的锐角，可用反三角函数表示）.

三、（本题满分 14 分）

设函数$f(x)=\log_3\left(x^2-4mx+4m^2+m+\dfrac{1}{m-1}\right)$，其中$m$是实数，又用$M$表示集合$\{m\mid m>1\}$.

（1）求证：当$m\in M$时，$f(x)$对所有实数x都有意义；反之，如果$f(x)$对所有实数x都有意义，则$m\in M$.

（2）当$m\in M$时，求函数$f(x)$的最小值.

（3）求证：对每一个$m\in M$，函数$f(x)$的最小值都不小于 1.

四、（本题满分 14 分）

在直角坐标系中，有椭圆 I 和抛物线 II，它们的参数方程分别是

I：$\begin{cases} x = m + 2\cos\phi, \\ y = \sqrt{3}\sin\phi. \end{cases}$（$m$ 是常数，ϕ 是参数）

II：$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} + t^2 \\ y = \sqrt{6}t \end{cases}$（$t$ 是参数）

（1）求证：当 $m = 4$ 时，椭圆 I 有一个焦点和一条准线分别与抛物线 II 的焦点和准线重合.

（2）求证：当且仅当 $m \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$ 时，椭圆 I 与抛物线 II 有交点.

（3）在区间 $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$ 中有哪些 m 值，使得椭圆 I 和抛物线 II 的交点与坐标原点的距离等于这个交点与椭圆 I 的中心的距离？

五、（附加题，本题满分 10 分，不计入总分）

已知函数 $f(x) = x^5 - 5x + c$，其中 c 是实数.

（1）求 $f(x)$ 的极大值和极小值.

（2）证明方程 $f(x) = 0$ 的不同实根的个数不大于 3.

1985年广东省高等学校招生统一考试

数学（理工农医类）答案

第一卷

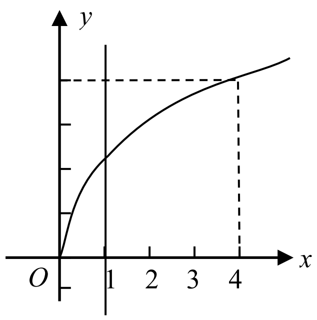
一、本题考查基础知识和基本运算，只需要直接写出结果．每一个小题，结果正确的，给 2 分．10 个小题的给分的和就是本题全题的给分．

1．$\{x \mid x \leqslant 1\}$　　2．$\dfrac{x}{x^2-1}$　　3．$\dfrac{1}{9}$

4．$x^2+y^2-x-2y=0$　　5．0　　6．$\dfrac{3}{2}$　　7．$\dfrac{\pi}{2}$

8．-10　　9．$y=2+\sqrt{9-x^2}\,(-3 \leqslant x \leqslant 3)$

10．如图



二、本题考查基础知识和基本运算．第 1~16 小题，每个小题选对给 2 分；第 17~20 小题，每个小题选对给 3 分，不选、错选或者选出的代号超过一个的，一律给 0 分．20 个小题的给分的和就是本题全题的给分．

1．E　2．A　3．B　4．A　5．C　6．C　7．E　8．B　9．D　10．C

11．C　12．B　13．D　14．C　15．D　16．D　17．C　18．A　19．E　20．B

第二卷

一、本题考查绝对值不等式和三角函数的基本知识与数学归纳法的运用．

证：（1）当 $n=1$ 时，左边 $=|\sin\theta|=$ 右边，所以原不等式成立．

（2）假设当 $n=k(k \geqslant 1)$ 时，不等式成立，即

$|\sin k\theta| \leqslant k|\sin\theta|$．

那么，当 $n=k+1$ 时

$|\sin(k+1)\theta|=|\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta|$

$\leqslant|\sin k\theta\cos\theta|+|\cos k\theta\sin\theta|$

$=|\sin k\theta||\cos\theta|+|\cos k\theta||\sin\theta|$

$\leqslant|\sin k\theta|+|\sin\theta| \leqslant k|\sin\theta|+|\sin\theta|$

$=(k+1)|\sin\theta|$．

这就是说，原不等式对于 $n=k+1$ 成立.
根据（1）和（2），原不等式对于任意自然数 n 都成立.
二、本题考查空间的两条直线的位置关系，二面角大小的计算以及空间想象能力和逻辑推理能力.
（1）证：$\because ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱住，

$\therefore AA_1 \perp$ 底面ABC.

$\because CE \subset$ 平面 ABC，$\therefore CE \perp AA_1$.

又 E 是等腰三角形 ABC 底边 AB 的中点，$\therefore CE \perp AB$，故 $CE \perp$ 平面 ABB_1A_1.

$\because AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore CE \perp AB_1$.

（2）证：$\because CE \perp AB, CE \perp AB_1$，

$\therefore CE \perp$ 平面 ABB_1A_1.

过 E 作 $ED \perp AB_1$，垂足为 D，$ED \subset$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore CE \perp ED$.

故 ED 是 CE 和 AB_1 所在的异面直线的距离.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABB_1$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$\angle A$ 公共，

$\therefore \triangle ABB_1 \backsim \triangle ADE$，$\therefore \dfrac{ED}{BB_1}=\dfrac{AE}{AB_1}$ 即 $ED=\dfrac{AE\cdot BB_1}{AB_1}$.

$\because AC=BC=2, \angle ACB=90^\circ$，

$\therefore AB=2\sqrt{2}, AE=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{2}$.

又在 $\mathrm{Rt}\triangle ABB_1$ 中，$BB_1=4$，$\therefore AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1{}^2}=\sqrt{8+16}=2\sqrt{6}$.

$\therefore ED=\dfrac{\sqrt{2}\cdot 4}{2\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$（cm）

（3）解：$\because ED \perp AB_1, CE \perp$ 侧面 ABB_1A_1，连结 CD，依三垂线定理有 $CD \perp AB_1$，故 $\angle CDE$ 是截面 CAB_1 和侧面 ABB_1A_1 所成的二面角的平面角，且为锐角. CE 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边上的中线，故 $CE=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{2}$，

又 $ED=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，于是，在 $\mathrm{Rt}\triangle CED$ 中，$\mathrm{tg}\angle CDE=\dfrac{CE}{ED}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

故截面 CAB_1 和侧面 ABB_1A_1 所成的较小的二面角等于 $\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

三、本题考查二次函数与对数函数的基本性质，不等式的证明和不等式的解法.
（1）证：当 $m \in M$ 时，有 $m>1$，从而对所有的实数 x 都有

$$x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}=(x-2m)^2+m+\frac{1}{m-1}\geqslant m+\frac{1}{m-1}>0$$

于是，当 $m\in M$ 时，函数 $f(x)=\log_3\left(x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}\right)$

对所有的实数 x 都有意义．

反之，如果 $f(x)$ 对所有的实数 x 都有意义，则对所有的实数 x，都有

$x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}>0$，

而当 $x=2m$ 时，上式变为 $m+\frac{1}{m-1}>0$，

即 $\frac{m^2-m+1}{m-1}>0$ 或 $\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{m-1}>0$．

由于上式左端的分子总是正数，所以它的分母 $m-1>0$，即 $m>1$，从而 $m\in M$．

（2）解：因为以 3 为底的对数函数是增函数，所以，从①式得

$$f(m)=\log_3\left[(x-2m)^2+m+\frac{1}{m-1}\right]\geqslant\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right).$$

又因为 $f(2m)=\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)$．

所以，当 $m\in M$ 时，$f(x)$ 的最小值是 $\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)$．

（3）证：当 $m\in M$ 时，有 $m>1$，所以

$$m+\frac{1}{m-1}=(m-1)+\frac{1}{m-1}+1\geqslant 2\sqrt{(m-1)\frac{1}{m-1}}+1=3,$$

上式两端取以 3 为底的对数，得 $\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)\geqslant\log_3 3=1$．

于是，根据（2）的结果可知，对每一个 $m\in M$，$f(x)$ 的最小值都不小于 1．

四、本题考查二次曲线的基础知识，曲线参数方程的应用，以及逻辑推理能力和计算能力．

（1）证：将曲线 I，II 的方程化为直角坐标方程

I：$\frac{(x-m)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，II：$y^2=6\left(x-\frac{3}{2}\right)$．

当 $m=4$ 时，椭圆 I 中心的坐标为 $(4,0)$，长轴在 x 轴上，长半轴长 $a=\sqrt{4}=2$，短半轴长 $b=\sqrt{3}$，从而，半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，焦点坐标 $(4\pm c,0)$ 即为 $(5,0)$ 和 $(3,0)$，准线方程 $x=4\pm\frac{a^2}{c}$，即为 $x=8$ 和 $x=0$．

由抛物线 II 的方程可知：该抛物线以 x 轴为对称轴，开口向右，顶点的坐标为 $\left(\frac{3}{2},0\right)$，焦点至顶点的距离是 $\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$，

从而焦点的坐标为 $\left(\frac{3}{2}+\frac{p}{2},0\right)$ 即为 $(3,0)$，准线方程是 $x=\frac{3}{2}-\frac{p}{2}$ 即为 $x=0$.

所以，椭圆 I 的左焦点和左准线分别与抛物线 II 的焦点和准线重合.

（2）证：将曲线 I，II 的直角坐标方程联立

$$(*)\begin{cases}\dfrac{(x-m)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, & ① \\ y^2=6\left(x-\dfrac{3}{2}\right). & ②\end{cases}$$

那么，曲线 I，II 有交点 $\Leftrightarrow$ 方程组（*）有实数解 x，y．这时，$(x,\ y)$ 为交点.

将②代入①，整理得

$x^2+(8-2m)x+m^2-16=0$；③

又由于 $x-\frac{3}{2}=\frac{y^2}{6}\geqslant 0$，故方程组（*）有实数解 $\Leftrightarrow$ 方程③有不小于 $\frac{3}{2}$ 的实根.

方程③的两个根为

$x_1=-(4-m)+2\sqrt{2(4-m)}$，

$x_2=-(4-m)-2\sqrt{2(4-m)}$.

可见，当且仅当 $4-m\geqslant 0$ 时，x_1，x_2 是实根，且这时 $x_2\leqslant 0$.

由此可知：方程③有不小于 $\frac{3}{2}$ 的实根 $\Leftrightarrow$ m 满足不等式组

$$\begin{cases}4-m\geqslant 0, \\ -(4-m)+2\sqrt{2(4-m)}\geqslant\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

解此不等式组的解集 $\left\{m\,|\,-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{7}{2}\right\}$.

综合起来，即得：当且仅当 $m\in\left[-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$ 时，椭圆 I 与抛物线 II 有交点.

（3）因为椭圆 I 中心的坐标为 $(m,0)$，所以，曲线 I，II 的交点 $(x,\ y)$ 满足题设，等价于 x，y 满足

$x^2+y^2=(x-m)^2+y^2$，即是

$m(m-2x)=0$，　　①

由（2）的证明可知，曲线 I，II 的交点横坐标是

$x=(m-4)+2\sqrt{2(4-m)}$，$m\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right]$.

将它代入①式，得知所求的 m 值应满足方程

$m[8-m-4\sqrt{2(4-m)}]=0$，且 $m\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right]$.

解方程：由 $m=0$ 得 $m_1=0$，由 $8-m-4\sqrt{2(4-m)}=0$．即

$m^2+16m-64=0$，

得 $m_2=8(\sqrt{2}-1)\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right]$，

$m_3=-8(\sqrt{2}+1)\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right]$，（应舍去）

直接检验可知，当 $m=0$ 或 $8(\sqrt{2}-1)$ 时，曲线 I，II 的交点满足题设条件，故所求的 m 的值是 0 和 $8(\sqrt{2}-1)$．

五、本题考查利用导数求函数极值和讨论方程的不同的实根个数的能力．

（1）解：$f'(x)=5x^4-5=5(x^4-1)$．

令 $f'(x)=0$，即 $5(x^4-1)=0$，这个方程的实根是 $x=\pm 1$．而

$f(-1)=-1+5+C=C+4$，

$f(1)=1-5+C=C-4$．

函数 $f(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		$C+4$	$\searrow$	$C-4$	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的极大值是 $f(-1)=C+4$，$f(x)$ 的极小值是 $f(1)=C-4$．

（2）证：用反证法证明．假如方程 $f(x)=0$ 的不同实根个数大于 3，则至少可找到四个不同的实数 $x_1<x_2<x_3<x_4$，

使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$，

根据微分中值定理，有 $\theta_1\in(x_1，x_2)$，使得

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\theta_1)(x_2-x_1)$，

由式①及 $x_2>x_1$，可知 $f'(\theta_1)=0$．这表明方程 $f'(x)=0$ 在区间 $(x_1，x_2)$ 中至少有一个实根 θ_1；同理可证：方程

$f'(x)=0$在区间$(x_2,\ x_3)$，$(x_3,\ x_4)$中分别有实根$\theta_2,\ \theta_3$．显然，有$\theta_1<\theta_2<\theta_3$，即方程$f'(x)=0$至少有三个不同的实根，这与（1）中所得的结果相矛盾，从而，方程$f(x)=0$的不同实根的个数不大于3．