文史类试题

考生注意：这份试卷共七道大题，满分120分

第一道大题含20个选择题，考生必须在答题纸上答题。

第二大题至第七大题应在试卷上答题。

一、（本题满分40分）本题共有20个小题，每一个小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的。答题时，在答题纸上把代表正确结论代号的小圈按答题纸上的要求涂黑。每小题涂对得2分，不涂、涂错或涂黑的小圈数超过一个，则得零分。

1．平移坐标轴，把原点$O(0,0)$移到$O'(2,-1)$，则点$(-1,-3)$在新坐标系中的坐标是

(A) $(3,2)$　　(B) $(-3,-2)$

(C) $(-3,2)$　　(D) $(3,-2)$

2．下列三角关系式中不正确的是

$(A)\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$

$(B)\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

$(C)\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$

$(D)\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

3．在直角坐标系中，直线$x+\sqrt{3}y+1=0$的倾角是

$(A)\frac{1}{6}\pi$　$(B)\frac{1}{3}\pi$　$(C)\frac{2}{3}\pi$　$(D)\frac{5}{6}\pi$

4．函数$y=2\mathrm{tg}(3x+\frac{1}{6}\pi)$的最小正周期是

$(A)\frac{1}{6}\pi$　$(B)\frac{1}{3}\pi$　$(C)\frac{1}{2}\pi$　$(D)\frac{2}{3}\pi$

5．在空间，下列命题中正确的是

(A)如果两直线a、b与直线l所成的角相等，那么$a\parallel b$

(B)如果两直线a、b与平面α所成的角相等，那么$a\parallel b$

(C)如果直线l与两平面α、β所成的角都是直角，那么$\alpha\parallel\beta$

(D)如果平面γ与两平面α、β所成的二面角都是直二面角，那么$\alpha\parallel\beta$

6．函数$y=\mathrm{tg}(x+\frac{1}{3}\pi)$的定义域是

(A) $\{x|x\in R$且$x\neq k\pi+\frac{1}{6}\pi,\ k\in Z\}$

(B) $(x|x\in R$且$x\neq k\pi-\frac{1}{6}\pi,\ k\in Z\}$

(C) $\{x|x\in R$且$x\neq 2k\pi+\frac{1}{6}\pi, k\in Z\}$

(D) $\{x|x\in R$且$x\neq 2k\pi-\frac{1}{6}\pi, k\in Z\}$

7．若空间有10个点，则可以确定的平面总数最多有

(A) 90个　　(B) 100个

(C) 120个　　(D) 150个

8．下列双曲线方程中，以$y=\pm\frac{1}{2}x$为渐近线的是

(A)$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$　(B)$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

(C)$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1$　(D)$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=1$

9．复数$\sqrt{3}-i$的幅角的主值是

(A)$\frac{1}{6}\pi$　　(B)$\frac{5}{6}\pi$

(C)$7\pi/6$　　(D)$11\pi/6$

10．等式$\log_3 x^2=2$成立是等式$\log_3 x=1$成立的

(A)充分条件但不是必要条件

(B)必要条件但不是充分条件

(C)充分必要条件

(D)既不充分又不必要的条件

11．在等比数列中，已知首项为9/8，末项为$\frac{1}{3}$，公比为$\frac{2}{3}$，则项数是

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

12．已知定直线l和l外一定点A，过点A且与l相切的圆的圆心轨迹是

(A)抛物线　　(B)双曲线

(C)椭　圆　　(D)直　线

13．若$\sin\frac{1}{2}\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\frac{1}{2}\theta=-\frac{4}{5}$，则$\theta$角的终边在

(A) 第一象限　(B) 第二象限

(C) 第三象限　(D) 第四象限

14．下列不等式中正确的是

(A) $\sin\frac{5}{7}\pi>\sin\frac{4}{7}\pi$

(B) $\mathrm{tg}(15\pi/8)>\mathrm{tg}(-\frac{1}{7}\pi)$

(C) $\sin(-\frac{1}{5}\pi)>\sin(-\frac{1}{6}\pi)$

(D) $\cos(-\frac{3}{5}\pi)>\cos(-9\pi/4)$

15．集合$\{a,\ b,c\}$的所有子集的个数是

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8

16．设自变量$x\in R$，下列各函数中奇函数是

(A) $y=x+3$　　(B) $y=-2x^2$

(C) $y=\lg 3^x$　　(D) $y=-|x|$

17．a、b满足$0<a<b<1$．下列不等式中正确的是

(A) $a^a<a^b$　　(B) $b^a<b^b$

(C) $a^a<b^a$　　(D) $b^b<a^b$

18．正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中，直线BC_1与AC

(A) 相交且垂直　(B) 相交但不垂直

(C) 异面且垂直　(D) 异面但不垂直

19．设复数$z=a+bi(a、b\in R$，且$b\neq 0)$，则$|z^2|$，$|z|^2$、z^2的关系是

(A) $|z^2|=|z|^2\neq z^2$

(B) $|z^2|=|z|^2=z^2$

(C) $|z^2|\neq|z|^2=z^2$　(D)互不相等

20．过抛物线焦点F的直线与抛物线相交于A、B两点，若A、B在抛物线准线上的射影分别是A_1、B_1，则$\angle A_1FB_1$等于

(A)45°　(B)60°　(C)90°　(D)120°

（以上20个小题采用机器阅卷，考生必须在答题纸上答题）

二、（本题满分30分）本题共有10个小题，每一个小题满分3分，只要求直接写出结果。

1．若三点P_1、P_2和P在一条直线上，

点P_1和点P_2在直角坐标系中的坐标分别为$(0,\ -6)$和$(3,\ 0)$，且$\dfrac{P_1P}{PP_2}=-\dfrac{1}{2}$，则点$P$的坐标是________。

2．正方体的全面积是 6，则其内切球的体积是________。

3．设直线l在x轴和y轴上的截距分别为 4 和 3，则点$(2,\ -1)$到l的距离是____。

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n(n+1)}=$____。

5．$(\sqrt[3]{x}-1/\sqrt{x})^8$的展开式中，$x$的一次项的系数是______。

6．不等式$\sqrt{x-1}<3$的解是____。

7．轴截面是等边三角形的圆锥，它的侧面展开图扇形的圆心角的弧度数等于________。

8．用1、2、3、4四个数字组成没有重复数字的四位奇数的个数是________。

9．已知$\cos\theta=-\frac{3}{5}$且$\pi<\theta<3\pi/2$，则$\operatorname{ctg}(\theta-\frac{1}{4}\pi)=$________。

10．函数$y=\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)$的定义域是________。

三、（本题满分 8 分）

设$f(x)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$，$g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$，

试解不等式$f(x)\geqslant g(x)$。

四、（本题满分 6 分）

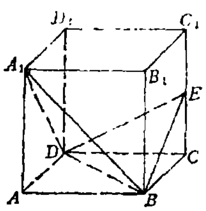
设$y=\dfrac{1-\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}$，当$\theta$在$[0,\pi]$上分别取何值时，$y$取得最大值和最小值。

五、（本题满分12分）

写出棣莫佛定理并用数学归纳法加以证明。

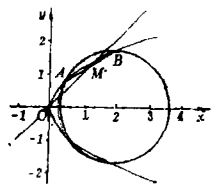
六、（本题满分12分）

在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为棱CC_1的中点，求截面A_1BD和截面EBD所成二面角的度数。



七、（本题满分12分）

如果抛物线$y^2=px$和圆$(x-2)^2+y^2=3$相交，它们在x轴上方的交点为A和B，那么当p为何值时，线段AB的中点M在直线$y=x$上。



文史类试题解答

一、每一小题结果正确的给 2 分（机器阅卷）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
代号	B	B	D	B	C	A	C	A	D	B
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
代号	B	A	D	B	D	C	C	D	A	C

二、每一小题结果正确的给 3 分。

1．$(-3,\ -12)$。　　2．$\frac{1}{6}\pi$。

3．2．　　4．1．

5．28或C_8^6。　　6．$1\leqslant x<10$。

7．π。　　8．12。

9．7．　　10．$(0,\ 1)$。

三、解　不等式$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$。

即
$$\begin{cases} x+1>0, & ①\\ 1-x>0, & ②\\ \log_{\frac{1}{3}}(x+1)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}(1-x)^2. & ③\end{cases}$$

解不等式①，得$x>-1$，

解不等式②，得$x<1$，

解不等式③，得$x+1\leqslant(1-x)^2$，即$x\leqslant 0$或$x\geqslant 3$。

所以原不等式的解是$-1<x\leqslant 0$。

四、解∵$y=\dfrac{1-\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2-\sin2\theta}{2+\sin2\theta}$，

∴当$\theta=\frac{3}{4}\pi$时，$\sin2\theta=-1$，y取得最大值；

当$\theta=\frac{1}{4}\pi$时，$\sin2\theta=1$，y取得最小值。

五、解 棣莫佛定理：复数的n次幂（n是正整数）的模等于这个复数的模的n次幂，它的幅角等于这个复数的幅角的n倍。

若记$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$n$为正整数，则$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$。

证明：（1）当$n=1$时，显然成立。

（2）假设当$n=k$时定理成立，即有

$z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$。

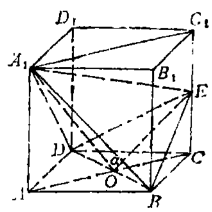
当$n=k+1$时，

$$
\begin{aligned}
z^{k+1}&=z^k\cdot z=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)\\
&=r^{k+1}[(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+\\
&\quad+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)]\\
&=r^{k+1}[\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta],
\end{aligned}
$$

即定理在$n=k+1$时也成立。

根据（1）和（2），对于任何正整数n，定理都成立。

六、解 连AC，与BD交于O，则O为AC、BD的中点，连A_1O、EO、A_1E和A_1C_1



$\because A_1B=A_1D$, $EB=ED$,

$\therefore A_1O\perp BD$, $EO\perp BD$.

故$\angle A_1OE$为两截面所成二面角的平面角。

设$\angle A_1OE=\alpha$，正方体的棱长为a。

$\because A_1O=\sqrt{AA_1^2+AO^2}=\sqrt{6}a/2$,

$EO=\sqrt{EC^2+CO^2}=\sqrt{3}a/2$,

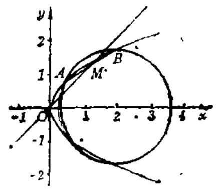
$A_1E=\sqrt{A_1C_1^2+C_1E^2}=3a/2$,

在$\triangle A_1OE$中，

$$\cos\alpha=\frac{A_1O^2+EO^2-A_1E^2}{2A_1O\cdot EO}$$

$\therefore\alpha=90^\circ$，即两截面所成的二面角为$90^\circ$。

七、解 设A点坐标为$(x_1,\ y_1)$$B$点坐标为$(x_2,\ y_2)$。



$$\begin{cases}y^2=px, & ①\\(x-2)^2+y^2=3. & ②\end{cases}$$

①代入②，得

$x^2+(p-4)x+1=0$,

$x_1+x_2=4-p$,

$x_1x_2=1$.

设M点坐标为$(x_M,\ y_M)$，

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4-p}{2},$$

$\because$点A和B在x轴上方，

$$
\begin{aligned}
\therefore y_1+y_2&=\sqrt{(y_1+y_2)^2}\\
&=\sqrt{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2}\\
&=\sqrt{p(x_1+x_2)+2p\sqrt{x_1x_2}}\\
&=\sqrt{p(4-p)+2p}=\sqrt{6p-p^2},
\end{aligned}
$$

$$y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{\sqrt{6p-p^2}}{2}.$$

$\because$点M在直线$y=x$上，

$$\therefore\frac{\sqrt{6p-p^2}}{2}=\frac{4-p}{2}.$$

即 $6p-p^2=16-8p+p^2$,

$p^2-7p+8=0$,

$$p=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}.$$

$\because 4-p\geqslant 0$，$p=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$舍去，

$$\therefore p=\frac{7-\sqrt{17}}{2}.$$

（上海市四平中学马积祥提供）