一九八六年上海市普通高等学校招生统一考试数学试题与解答

理　工　农　医　类　试　题

考生注意：这份试卷共七道大题，满分120分。

第一道大题含20个选择题，考生必须在答题纸上答题。

第二大题至第七大题应在本试卷上答题。

一、（本题满分40分）本题共有20个小题，每一个小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的。答题时，在答题纸上把代表正确结论代号的小圈按答题纸上的要求涂黑，每小题涂对得2分，不涂、涂错或涂黑的小圈数超过一个，则得零分。

1、平移坐标轴，把原点$O(0,0)$移到$O'(2,-1)$则点$(-1,-3)$在新坐标系中的坐标是（A）$(3,2)$（B）$(-3,-2)$。（C）$(-3,2)$。（D）$(3,-2)$。

2、下列三角关系式中不正确的是

（A）$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。

（B）$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。

（C）$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。

（D）$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。

3、在直角坐标系中，直线$x+\sqrt{3}y+1=0$的倾角是

（A）$\frac{1}{6}\pi$。（B）$\frac{1}{3}\pi$。（C）$\frac{2}{3}\pi$。（D）$\frac{5}{6}\pi$。

4、函数$y=2\operatorname{tg}(3x+\frac{\pi}{6})$的最小正周期是（$A$）$\frac{1}{6}\pi$、（$B$）$\frac{1}{3}\pi$、（$C$）$\frac{1}{2}\pi$（$D$）$\frac{2}{3}\pi$、

5、在空间，下列命题中正确的是

（A）如果两直线a、b与直线l所成的角相等，那么$a\parallel b$。

（B）如果两直线a、b与平面α所成的角相等，那么$a\parallel b$。

（C）如果直线l与两平面α、β所成的角都是直角，那么，$\alpha\parallel\beta$。

（D）如果平面r与两平面α、β所成的二面角都是直二面角，那么$\alpha\parallel\beta$

6、当$|x|\leqslant 1$时，$\arccos(-x)$等于

（A）$\pi-\arccos x$　　（B）$-\arccos x$。

（C）$\arccos x$。　　（D）$\pi+\arccos x$。

7、极坐标方程$\rho=\frac{5}{2-4\cos\theta}$所表示的曲线是

（A）椭圆，（B）抛物线。（C）双曲线。（D）直线。

8、下列双曲线方程中，以$y=\pm\frac{1}{2}x$为渐近线的是

（A）$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$。（$B$）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$。

（C）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1$。（$D$）$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=1$。

9、复数$\sqrt{3}-i$的幅角的主值是

（A）$\frac{1}{6}\pi$。　（B）$\frac{5}{6}\pi$。（C）$\frac{7}{6}\pi$。

（D）$\frac{11}{6}\pi$。

10、等式$\log_3 x^2=2$成立是等式$\log_3 x=1$成立的

（A）充分条件但不是必要条件。

（B）必要条件但不是充分条件，

（C）充分必要条件，

(D)既不充分又不必要的条件、

11、在等比数列中，已知首项为$\frac{9}{8}$，末项为$\frac{1}{3}$，公比为$\frac{2}{3}$，则项数是

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6．

12、已知定直线l和l外一定点A，过点A且与l相切的圆的圆心轨迹是 (A) 抛物线。(B) 双曲线，(C) 椭圆，(D) 直线，

13、若$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$，$\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{4}{5}$，则$\theta$角的终边在

(A) 第一象限、(B) 第二象限、
(C) 第三象限、(D) 第四象限

14、下列不等式中正确的是

(A) $\sin\frac{5}{7}\pi>\sin\frac{4}{7}\pi$，

(B) $\operatorname{tg}(15/8)\pi>\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{7})$，

(C) $\sin(-\frac{1}{5}\pi)>\sin(-\frac{1}{6}\pi)$．

(D) $\cos(-\frac{3}{5}\pi)>\cos(-9/4)\pi$．

15、函数$y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ ($x\in R$)

(A) 是奇函数，不是偶函数 (B) 是偶函数，不是奇函数 (C) 既不是奇函数，又不是偶函数 (D) 既是奇函数又是偶函数

16、a、b满足$0<a<b<1$．下列不等式中正确的是

(A) $a^a<a^b$　　(B) $b^a<b^b$
(C) $a^a<b^a$　　(D) $b^b<a^b$

17、正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，直线BC_1与AC

(A) 相交且垂直　(B) 相交但不垂直
(C) 异面且垂直　(D)异面但不垂直

18、设复数$z=a+bi$(a、$b\in R$，且$b\neq0$)，则$|z^2|$、$|z|^2$、z^2的关系是

(A) $|z^2|=|z|^2\neq z^2$
(B) $|z^2|=|z|^2=z^2$　(C) $|z^2|\neq|z|^2=z^2$　(D)互不相等

19、过抛物线焦点F的直线与抛物线相交于A、B两点，若A、B在抛物线准线上的射影分别是A_1、B_1，则$\angle A_1FB_1$等于

(A) 45°　(B)60°
(C) 90°　(D)120°

20、若全集$I=\{(x,y)|x、y\in R\}$，$A=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1,\ x、y\in R\}$，$B=\{(x,y)|y=x+1, x、y\in R\}$，则$\overline{A}\cap B$是

(A) $\overline{A}$　(B) B　(C) ϕ
(D) $\{(2,3)\}$

(以上20个小题采用机器阅卷，考生必须在答题纸上答题)

二、(本题满分30分) 本题共有10个小题，每一个小题满分3分，只要求直接写出结果。

1．若三点P_1、P_2和P在一条直线上，点P_1和点P_2在直角坐标系中的坐标分别为(0，－6)和(3，0)，且$\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{1}{2}$，则点$P$的坐标是________。

2、正方体的全面积是6，则其内切球的体积是________。

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n(n+1)}=$____。

4、$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$的展开式中，$x$的一次项的系数是________。

5、不等式组$\begin{cases}\sqrt{x^2-9}\leqslant4,\\ x>0\end{cases}$的解是________。

6、轴截面是等边三角形的圆锥，它的侧面展开图扇形的圆心角的弧度数等于________。

7、用1、2、3、4四个数字组成没有重复数字的四位奇数的个数是________。

8、已知$\cos\theta=-\frac{3}{5}$且$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，则$\operatorname{ctg}(\theta-\frac{\pi}{4})=$________。

9、函数$y=\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)$的定义域是________________.

10、若直线l的参数方程是
$\begin{cases}x=3+\frac{4}{5}t\\ y=-2+\frac{3}{5}t\end{cases}$，则过点（4，-1）且与$l$平行的直线在$y$轴上的截距是______.

三、（本题满分7分）

设数列$\{a_n\}$的前n项的和为
$S_n=n^2+2n+4\ (n\in N)$。

1、写出这个数列的前三项a_1, a_2, a_3；

2、证明：数列$\{a_n\}$除去首项后所成的数列a_2，a_3，a_4，…是等差数列。

四、（本题满分7分）

设$x>0$，$y>0$。证明不等式
$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}>(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$。

五、（本题满分12分）本题共有2个小题，每个小题满分6分。

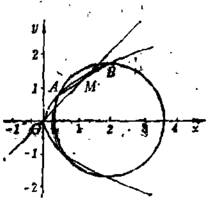
已知k为实数，复数$z=\cos\theta+i\sin\theta$。

1、当k和θ分别为何值时，复数$z^3+k\bar{z}^3$是纯虚数。

2、当θ变化时，求出$|z^3+k\bar{z}^3|$的最大值和最小值。

六、（本题满分12分）

如果抛物线$y^2=px$和圆$(x-2)^2+y^2=3$相交，它们在x轴上方的交点为A和B，那么当p为何值时，线段AB的中点M在直线$y=x$上。



七、（本题满分12分）

已知直角三角形ABC的两直角边

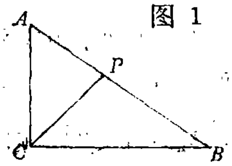


图 1

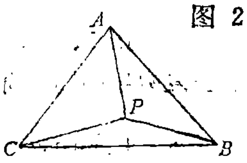


图 2

$AC=2$，$BC=3$，P为斜边AB上一点(图1)。现沿CP将此直角三角形折成直二面角$A-CP-B$，当$AB=\sqrt{7}$时，求二面角$P-AC-B$的大小（图2）。

理工农医类试题解答

一、每一小题结果正确的给2分。(机器阅卷)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
代号	B	B	D	B	C	A	C	A	D	B
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
代号	B	A	D	B	A	C	D	A	C	D

二、每一小题结果正确的给3分。

1．（-3，-12）；2．$\frac{\pi}{6}$；3．1；4．28或C_8^6；5．$3\leqslant x\leqslant 5$；6．π；7．12；8．7；9．（0，1）；10．-4.

三、解 1、$a_1=S_1=1^2+2\times1+4=7$，

$a_2=S_2-S_1=2^2+2\times2+4-7=5$，

$a_3=S_3-S_2=$
$=3^2+2\times3+4-(2^2+2\times2+4)=7$。

2、当$n\geqslant2$时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=$
$=n^2+2n+4-[(n-1)^2+2(n-1)+4]$
$=2n+1$，

从而$a_{n+1}-a_n=2(n+1)+1-(2n+1)=2$。

∴ 数列a_2，a_3，a_4……构成公差是2的等差数列。

四、解 $(x^2+y^2)^3-(x^3+y^3)^2$
$=3x^4y^2+3x^2y^4-2x^3y^3$
$=x^2y^2(3x^2-2xy+3y^2)$
$=x^2y^2[3(x-\frac{1}{3}y)^2+\frac{8}{3}y^2]$
>0，（∵$x>0$，$y>0$）

∴ $(x^2+y^2)^3>(x^3+y^3)^2$。

上式两端都是正数，两端开6次方，得
$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}>(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$。

五、解　1、根据棣莫佛定理

$z^3+k\bar{z}^3=\cos3\theta+i\sin3\theta+k(\cos3\theta-i\sin3\theta)$

$=(1+k)\cos3\theta+i(1-k)\sin3\theta.$

$$\begin{cases}(1+k)\cos3\theta=0, & ①\\(1-k)\sin3\theta\neq0. & ②\end{cases}$$

解①得　$k=-1$或$\cos3\theta=0$,

即　$k=-1$或$\theta=\frac{2}{3}n\pi\pm\frac{\pi}{6}(n\in Z)$

解②得　$k\neq1$　且　$\sin3\theta\neq0$,

即　$k\neq1$　且　$\theta\neq\frac{n\pi}{3}(n\in Z)$.

∴当$k=-1$　且$\theta\neq\frac{n\pi}{3}$　$(n\in Z)$

或当$k\neq1$且$\theta=\frac{2}{3}n\pi\pm\frac{\pi}{6}(n\in Z)$时,

$z^3+k\bar{z}^3$为纯虚数。

2、∵$|z^3+k\bar{z}^3|^2=$

$=(1+k)^2\cos^2 3\theta+(1-k)^2\sin^2 3\theta$

$=1+k^2+2k\cos6\theta$,

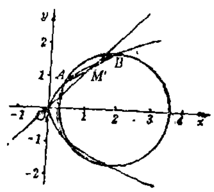
∴若$k>0$,则$|z^3+k\bar{z}^3|$的最大值是$1+k$,最小值是$|1-k|$;

若$k=0$,则$|z^3+k\bar{z}^3|$的最大值和最小值相等,都是1;

若$k<0$,则$|z^3+k\bar{z}^3|$的最大值是$1-k$,最小值是$|1+k|$。

六、解　设A点坐标为(x_1, y_1),B点坐标为(x_2, y_2),

$$\begin{cases}y^2=px, & ①\\(x-2)^2+y^2=3. & ②\end{cases}$$



①代入②得

$x^2+(p-4)x+1=0$.

则　$x_1+x_2=4-p$,

$x_1x_2=1$.

设M点坐标为(x_M, y_M),则

$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4-p}{2}$.

∵　点A和B在x轴上方,

∴　$y_1+y_2=\sqrt{(y_1+y_2)^2}$

$=\sqrt{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2}$

$=\sqrt{p(x_1+x_2)+2p\sqrt{x_1x_2}}$

$=\sqrt{p(4-p)+2p}=\sqrt{6p-p^2}$,

$y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{\sqrt{6p-p^2}}{2}$,

∵M点在直线$y=x$上,

∴$\frac{\sqrt{6p-p^2}}{2}=\frac{4-p}{2}$,

即　$6p-p^2=(4-p)^2$,

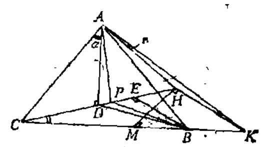
$p^2-7p+8=0$,

$p=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$.

∵$4-p\geqslant0$,$p=\frac{7+\sqrt{17}}{2}$舍去,

∴$p=\frac{7-\sqrt{17}}{2}$.

七、解法一　自A作$AD\perp CP$于D,自B作$BE\perp CP$于E。连BD。



∵平面$ACP\perp$平面BCP,$AD\perp CP$,

∴$AD\perp$平面BCP,则$\triangle ADB$为$Rt\triangle$,

设$\angle BCP=\alpha$,则$\angle CAD=\alpha$.

∴$AD=2\cos\alpha$,$CD=2\sin\alpha$,

$BE=3\sin\alpha$,$CE=3\cos\alpha$.

则$DE=CE-CD=3\cos\alpha-2\sin\alpha$.

由$\sqrt{7}=\sqrt{BE^2+ED^2+AD^2}=$

$=\sqrt{13\sin^2\alpha+13\cos^2\alpha-12\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\sqrt{13-6\sin2\alpha}$.

即　$7=13-6\sin2\alpha$,$\sin2\alpha=1$.

∵　$0°<\alpha<90°$,∴　$\alpha=45°$.

∴　$\angle BCD=\angle CAD=\angle ACP=45°$.

在$\triangle ACB$中,$AB=\sqrt{7}$,$AC=2$,$BC=3$.

∴$\cos\angle ACB=\frac{3^2+2^2-7}{2\times3\times2}=\frac{1}{2}$

∵$0°<\angle ACB<90°$,∴$\angle ACB=60°$。自A

作$AH\perp AC$交CP延长线于H，作$AK\perp AC$交CB延长线于K。连HK，则$\angle HAK$为二面角$P—AC—B$的平面角，设为γ。

由 $AH=AC=2$，$CH=2\sqrt{2}$。

$CK=2AC=4$，$AK=2\sqrt{3}$。

若自H作$HM\perp BC$于M，

则$CM=HM=2$，而$MK=2$，

$\therefore HM=CM=MK$。

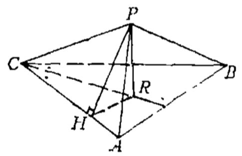
$\therefore\triangle KHC$为$Rt\triangle$，$KH\perp HC$。

$\because$平面$BCP\perp$平面ACP，$\therefore HK\perp$平面ACP，$KH\perp AH$，故$\triangle AHK$为$Rt\triangle$。

$\cos\gamma=\dfrac{AH}{AK}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\ \gamma=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

解法二 在$\triangle ABC$中，$BC=3$，$AC=2$，$AB=\sqrt{7}$。



$\therefore\ \cos\angle ACB$

$=\dfrac{3^2+2^2-7}{2\times3\times2}=\dfrac{1}{2}$，

$\because 0°<\angle ACB<90°$，$\therefore\angle ACB=60°$。

$\because\angle ACP+\angle PCB=90°$，$A-CP-B$为直二面角，而$\cos\angle ACP\cdot\cos\angle BCP=$

$=\cos\angle ACB$。

$\therefore\cos\angle ACP\cdot\cos(90°-\angle ACP)=\cos60°$，

即 $\cos\angle ACP\cdot\sin\angle ACP=\frac{1}{2}$，

$\sin2\angle ACP=1$。$\because 0°<\angle ACP<90°$，

$\therefore\angle ACP=45°=\angle BCP$。

自P作$PR\perp$平面ACB，垂足为R。

$\because\angle ACP=\angle BCP$，$\therefore R$在$\angle ACB$的平分线上。

自R作$RH\perp AC$，连PH。由三垂线定理可知，$PH\perp AC$。

故$\angle PHR$为二面角$P-AC-B$的平面角。

$\because PH=CH$，$RH=CH\operatorname{tg}30°$，

$\therefore\cos\angle PHR=\dfrac{RH}{PH}=\dfrac{PH\operatorname{tg}30°}{PH}$

$=\operatorname{tg}30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

$\therefore\angle PHR=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

即 二面角$P-AC-B$为$\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

文 史 类 试 题

考生注意：这份试卷共七道大题，满分120分

第一道大题含20个选择题，考生必须在答题纸上答题。

第二大题至第七大题应在试卷上答题。

一、（本题满分40分）本题共有20个小题，每一个小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的。答题时，在答题纸上把代表正确结论代号的小圈按答题纸上的要求涂黑。每小题涂对得2分，不涂、涂错或涂黑的小圈数超过一个，则得零分。

1．平移坐标轴，把原点$O(0,0)$移到$O'(2,-1)$，则点$(-1,-3)$在新坐标系中的坐标是

(A) $(3,\ 2)$　(B) $(-3,\ -2)$

(C) $(-3,\ 2)$　(D) $(3,\ -2)$

2．下列三角关系式中不正确的是

(A)$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

(B)$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

(C)$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

(D)$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

3．在直角坐标系中，直线$x+\sqrt{3}y+1=0$的倾角是

(A)$\frac{1}{6}\pi$　(B)$\frac{1}{3}\pi$　(C)$\frac{2}{3}\pi$　(D)$\frac{5}{6}\pi$

4．函数$y=2\operatorname{tg}(3x+\frac{1}{6}\pi)$的最小正周期是

(A)$\frac{1}{6}\pi$　(B)$\frac{1}{3}\pi$　(C)$\frac{1}{2}\pi$　(D)$\frac{2}{3}\pi$

5．在空间，下列命题中正确的是