1986年全国普通高等学校招生统一考试

广东省数学（理工农医类）

考生注意：

1．试题分两卷，同时分发，全卷在二小时三十分钟内完成，中间不休息．

2．试份试卷共六道大题，满分 120 分．

3．每份试题附一份答题卷，第一卷第一题（即选择题）的解答必须答在答题卷上，解答选择题时，按所选的答案，用铅笔在答题卷的相应位置上涂黑．

4．考生必须先解答第一卷的第一题，并在七十分钟内答完．监考员将在考试开始后七十分钟时前往取答题卷．

第一卷

一、（本题满分 50 分）本题共有 25 个小题，每一个小题都给出代号为 A，B，C，D，E 的五个结论中，其中只有一个结论是正确的．请把正确结论的代号选出，并在答题卷中的相应位置上涂黑（每个小题选对得 2 分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律得 0 分）．

1．通过点 $(0,2)$ 且倾斜角为 15° 的直线的方程是（　　）

A．$y=\left(\sqrt{3}-2\right)x+2$　　　　B．$y=\left(\sqrt{2}-1\right)x+2$

C．$y=\left(2-\sqrt{3}\right)x+2$　　　　D．$y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)x+2$

E．$y=\left(\sqrt{3}-1\right)x+2$

2．设 α，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且 $tg\alpha=\dfrac{4}{3}$，$tg\beta=\dfrac{1}{7}$，则 $\alpha-\beta=$（　　）

A．$\dfrac{\pi}{3}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{6}$　　D．$\dfrac{\pi}{8}$　　E．$-\dfrac{\pi}{3}$

3．侧面为等边三角形的正三棱锥，其侧面与底面所成的二面角的余弦的值是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{3}$　　E．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

4．参数方程 $\begin{cases}x=1-2\sin\varphi\\ y=\cos\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）所表示的曲线是（　　）

A．圆　　B．焦点在 x 轴上的双曲线　　C．焦点在 y 轴上的双曲线

D．焦点在 x 轴上的椭圆　　E．焦点在 y 轴上的椭圆

5．复数 $\sin 95^\circ+\mathrm{i}\cos 95^\circ$ 的一个辐角是（　　）

A．-85°　　B．-5°　　C．5°　　D．85°　　E．95°

6．若复数 $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n$ 是一个纯虚数，则 n 的一个可能的值是（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8　　E．9

7．在复平面上，设动点 Z 对应的复数为 z，Z 到复数 $-\mathrm{i}$ 和 $1+\mathrm{i}$ 所对应的点的距离之和等于 5，则动点 Z 的轨迹方程为（　　）

A．$|z+\mathrm{i}|+|z-1-\mathrm{i}|=5$　　B．$|z-\mathrm{i}|+|z+1+\mathrm{i}|=5$

C．$(z+\mathrm{i})+(z-1-\mathrm{i})=5$　　D．$(z-\mathrm{i})+(z+1+\mathrm{i})=5$

E．$(z+\mathrm{i})^2+(z-1-\mathrm{i})^2=25$

8．要从 8 名男医生和 7 名女医生中选 5 人组成一个医疗小组，如果医疗小组中至少有 2 名男医生和至少有 2 名女医生，则不同选法的种数是（　　）

A．$(C_8^3+C_7^2)\cdot(C_7^3+C_8^2)$　　B．$(C_8^3+C_7^2)+(C_7^3+C_8^2)$

C．$C_8^2\cdot C_7^3$　　D．$C_8^2\cdot C_7^2\cdot C_{11}^1$　　E．$C_8^2\cdot C_7^3+C_8^3\cdot C_7^2$

9．要排一张有 5 个独唱节目和 3 个合唱节目的演出节目表，如果合唱节目不排头，并且任何两个合唱节目不相邻，则不同排法的种数是（　　）

A．P_8^8　　B．$P_5^5\cdot P_3^3$　　C．$P_5^5\cdot P_5^3$　　D．$P_5^5\cdot P_8^3$　　E．$P_8^5\cdot P_8^3$

10．设 a，b 为实数且 $a+b=3$，则 2^a+2^b 的最小值是（　　）

A．6　　B．$4\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{6}$　　E．8

11．若 $\operatorname{ctg}\theta=3$，则 $\cos^2\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ 的值是（　　）

A．$-\dfrac{6}{5}$　　B．$-\dfrac{4}{5}$　　C．$\dfrac{4}{5}$　　D．1　　E．$\dfrac{6}{5}$

12．若 $\theta\in\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{1-\sin 2\theta}=$（　　）

A．$\cos\theta-\sin\theta$　　B．$\sin\theta+\cos\theta$　　C．$\sin\theta-\cos\theta$

D．$-\cos\theta-\sin\theta$　　D．$|\cos\theta|-|\sin\theta|$

13．函数 $y=\cos x-\sin^2 x-\cos 2x+\dfrac{7}{4}$ 的最大值是（　　）

A．$\dfrac{7}{4}$　　B．2　　C．$\dfrac{9}{4}$　　D．$\dfrac{17}{4}$　　E．$\dfrac{19}{4}$

14．$\operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{2}\right)=$（　　）

A．$-\dfrac{5\pi}{8}$　　B．$-\dfrac{3\pi}{8}$　　C．$-\dfrac{\pi}{8}$　　D．$\dfrac{\pi}{8}$　　E．$\dfrac{3\pi}{8}$

15．椭圆 $\dfrac{(x+1)^2}{4}+y^2=1$ 与抛物线 $y=1-(x+1)^2$ 的交点的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3　　D．4

16．若动圆与圆 $(x+2)^2+y^2=4$ 相外切且与直线 $x=2$ 相切，则动圆的圆心的轨迹方程是（　　）

A．$y^2-12x+12=0$　　B．$y^2+12x-12=0$　　C．$y^2+8x=0$

D．$y^2-8x=0$　　E．$y^2-6x+6=0$

17．通过点 $A(3,4)$ 及双曲线 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点的圆的方程为（　　）

A． $x^2+\left(y-\dfrac{8}{3}\right)^2=\dfrac{145}{9}$　　B． $\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{145}{9}$

C． $(x-2)^2+y^2=13$　　D． $x^2+(y-2)^2=13$

E． $x^2+\left(y-\dfrac{11}{4}\right)^2=\dfrac{169}{16}$

18．函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的单调下降区间（即在该区间内函数为减函数）是（　　）

A． $(-\infty,-3]$　　B． $[-3,+\infty)$　　C． $(-\infty,-1]$

D． $[-1,+\infty)$　　E． $[-3,-1]$

19．函数 $y=\log_{\cos 1}\cos x$ 的值域是（　　）

A． $[-1,1]$　　B． $(-\infty,+\infty)$　　C． $(-\infty,0]$

D． $[0,+\infty)$　　E． $\left[\cos 1,(\cos 1)^{-1}\right]$

20．在空间中，下列命题中成立的是（　　）

A．过平面 α 外的两点，必有且只有一个平面与平面 α 垂直

B．若直线 l 上有两点到平面 α 的距离相等，则直线 l 必平行于平面 α

C．若直线 l 与平面 α 内的无数多条直线垂直，则直线 l 必垂直于平面 α

D．互相平行的两条直线在一个平面内的射影必然是互相平行的两条直线

E．若点 P 到三角形的三条边的距离相等，则点 P 在该三角形所在平面内的射影必然是三角形的内心

21．四棱锥成为正四棱锥的一个充分但不必要的条件是（　　）

A．各侧面是等边三角形　　B．底面是正方形

C．各侧面三角形的顶角是 45°　　D．各侧面是等腰三角形且底面为正方形

E．顶点到底面的射影在底面四边形对角线的交点上

22．设有函数① $y=\cos\dfrac{x+3\pi}{2}$ 与② $y=\sin\dfrac{x+5\pi}{2}$，则（　　）

A．①与②都是奇函数　　B．①与②都是偶函数

C．①是奇函数而②是偶函数　　D．①是偶函数而②是奇函数

E．①与②中至少有一个既不是奇函数也不是偶函数

23．设函数 $y=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}2x)$， $y=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}2x)$ 与 $y=\sin(\arcsin 2x)$ 的图象分别记为 l_1， l_2 与 l_3，则（　　）

A． l_1， l_2， l_3 都相同　　B．只有 l_1 与 l_2 相同　　C．只有 l_1 与 l_3 相同

D．只有 l_2 与 l_3 相同　　E． l_1， l_2， l_3 都不相同

24．若点 A 的坐标为 $(3,2)$， F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，点 P 在该抛物线上移动，为使得 $|PA|+|PF|$ 取最小值，

点 P 的坐标应为（　　）

A．$(0,0)$　　　B．$(1,1)$　　C．$(2,2)$　　　D．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　　E．$(1,\sqrt{2})$

25．若函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 的图象大致形状是（　　）

二、（本题满分 20 分）本题共有 10 个小题，每个小题都有用横线表示的空位，请把你认为合适的内容写在横线上方的空位里，每个小题满分 2 分.

1．函数 $y=2\log_3 x(x>0)$ 的反函数是____________.

2．将极坐标方程 $\rho=\mathrm{tg}\theta\cdot\sec\theta$ 化为直角坐标方程，得__________.

3．设球内切于圆柱，则它们的表面积之比 $S_{圆柱全}:S_{球}$ 的值是___________.

4. 中心在原点的双曲线，若它的实半轴长为 2，一条准线的方程为 $x=-\frac{1}{2}$，则该双曲线的离心率的值是_________.

5．设函数 $y=\lg(x^2-x-2)$ 的定义域为 A，函数 $y=\sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$ 的定义域为 B，则 $A\cap B=$

___________.

6．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是正数，且 $a_3\cdot a_7=-12$，$a_4+a_6=-4$，则前 20 项的和 S_{20} 的值是__________.

7．$(2x-1)^5$ 的展开式中各项系数的绝对值的和为__________.

8．$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$__________.

9．方程$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$的解集是___________.

10．当a在$(-\infty,0)$内变化时，要使过三点$O(0,0)$，$A(-4,0)$，$B(-2,a)$的圆的圆心在$\triangle AOB$内（包括边界），则a允许取的最大值是____________.

第二卷

一、（本题满分12分）

设有对数方程$\lg(ax)=2\lg(x-1)$：

（1）当$a=2$时，解该对数方程；

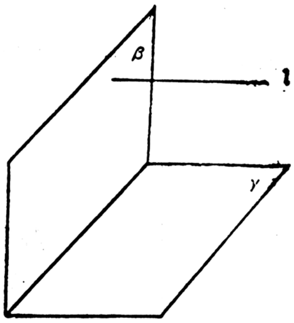
（2）讨论当a在什么范围内取值时，该对数方程有解，并求出它的解.

二、（本题满分14分）

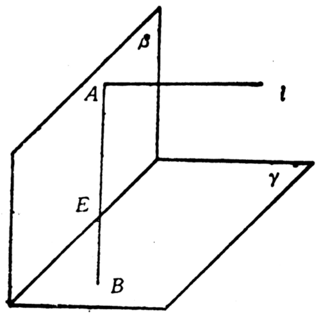
设直线l // 平面γ，$l\perp$平面β：

（1）（如图一）证明$\beta\perp\gamma$；

（2）（如图二）假设$\gamma\bigcap\beta=m$，$l\bigcap\beta=A$，$B\in\gamma$，$AB=\alpha$，AB与β所成的角为30°，l与γ的距离为b，求直线AB与直线m所成的角的大小（用反三角函数表示）.



（图一）



（图二）

三、（本题满分14分）

已知数列$\{a_n\}$，其中$a_n=\cos n\alpha(0<\alpha<\pi)$：

（1）试用a_{n-1}，a_{n-2}表示a_n；

（2）用数学归纳法证明

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}};$$

（3）求和$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{k+1}a_k+\cdots-a_{2n}+a_{2n+1}$.

四、（本题满分 10 分）

已知椭圆 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，试确定 m 的取值范围，使得对于直线 $y=4x+m$，椭圆 C 上有不同的两点关于该直线对称.

1986年广东省数学试题解答及评分标准

（理工农医类）

第一卷

一、本题考查基础知识和基本技能．

每一个小题，选对给 2 分，不选、选错或者选出的代号超过一个的，一律给 0 分．25 个小题的给分之和就是本题全题的给分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
答案	C	B	D	D	B	E	A	E	C	B	E	A	B

题号	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
答案	C	D	B	D	A	D	E	A	C	E	C	E

二、本题考查基础知识和基本技能，只需直接写出结果．

每一个小题，结果正确的，给 2 分．10 个小题的给分之和就是本题全题的给分．

1．$y=(\sqrt{3})^{x}(x\in\mathbf{R})$．

注：写成其他等价形式的，也给 2 分．

2．$x^{2}=y$．

3．$\frac{3}{2}$．

4．4．

5．$[-2,-1)$

6．180．

7．243．

8．$\frac{1}{2}$．

9．$\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{5\pi}{6}\text{或}x=k\pi+\frac{2\pi}{3}，k\in\mathbf{Z}\right\}$，

10．-2．

第二卷

一、本题主要考查对数函数的概念与性质、对数方程的解法和分析问题的能力．

解出第（1）小题给 5 分，解出第（2）小题给 7 分．

（1）解：当$a=2$时，有

$\lg(2x)=2\lg(x-1)$，

可得$2x=(x-1)^{2}$，……………………………………………………………………2 分

即$x^{2}-4x+1=0$．

解得$x=2\pm\sqrt{3}$．……………………………………………………………………3 分

经检验可知，对数方程的解是 $x=2+\sqrt{3}$． ……………………………………………………… 5 分

（2）解：由原方程可知 $ax>0$ 且 $x>1$，从而必须 $x>1$ 和 $a>0$． ……………………… 7 分

对于 $a>0$， $x>1$，原方程可化为

$\lg(ax)=\lg(x-1)^2$，

于是可得 $ax=(x-1)^2$．

即 $x^2-(2+a)x+1=0$． …………………………………………………………………………… 8 分

解得 $x=\dfrac{2+a\pm\sqrt{a^2+4a}}{2}$． ………………………………………………………………… 9 分

由于 $a>0$，故

$\dfrac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2}>1$； $\dfrac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2}<1$．

经检验可知，当 $a>0$ 时，原对数方程有解． ……………………………………………… 11 分

对数方程的解为 $x=\dfrac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2}$． …………………………………………………… 12 分

二、本题主要考查空间中直线、平面之间的位置关系以及空间想象能力和逻辑推理能力．证出第（1）小题给 5 分，解出第（2）小题给 9 分．

（1）证：过 l 作平面 α 与平面 γ 相交，设交线为 b， ……………………………… 2 分

因 $l\,/\!/\,\gamma$，故 $l\,/\!/\,b$． ………………………………………… 3 分

因 $l\perp\beta$，故 $b\perp\beta$． ………………………………………… 4 分

因 $b\subset\gamma$，故 $\gamma\perp\beta$． ………………………………………… 5 分

（2）解：在平面 γ 内过 B 作直线 $n\,/\!/\,m$，又作 $AE\perp n$ 垂足为 E，

则 $\angle ABE$ 为异面直线 AB 与 m 所成的角． ……………… 7 分

作 $AD\perp m$ 垂足为 D，因 $\beta\perp\gamma$， $\beta\bigcap\gamma=m$，故

$AD\perp\gamma$，由 l 与 γ 的距离为 b 得 $AD=b$． …………… 9 分

作 $BC\perp m$ 垂足为 C，连 AC，因 $\gamma\perp\beta$，故 $BC\perp\beta$，

则 $\angle BAC=30^\circ$，又因 $AB=a$，故 $BC=\dfrac{a}{2}$． ………10 分

连 DE， DE 是 AE 在平面 γ 内的射影，故 $DE\perp BE$．

于是 $DE \underline{\underline{/\!/}} BC$． ……………………………………………………………………… 11 分

在 Rt△ADE 中，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{b^2+\dfrac{a^2}{4}}$， ……………………………………12 分

故 $\sin\angle ABE=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{4b^2+a^2}}{2a}$， ……………………………………………………13 分

从而可得 $\angle ABE=\arcsin\dfrac{\sqrt{4b^2+a^2}}{2a}$． ………………………………………………14 分

三、本题主要考查数列的基础知识以及分析问题和应用数学归纳法证明问题的能力．
解出第（1）小题给 4 分，证出第（2）小题给 5 分，解出第（3）小题给 5 分．

（1）解：$a_n+a_{n-2}=\cos n\alpha+\cos(n-2)\alpha$

$=2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha$ ……………………………………………………………………… 2 分

$=2a_{n-1}\cos\alpha$．

故 $a_n=2a_{n-1}\cos\alpha-a_{n-2}$． ……………………………………………………………… 4 分

（2）解：①当 $n=1$ 时，左边是 $\cos\alpha$，右边是

$\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$，等式成立． ……………………………………………………… 5 分

②假设当 $n=k$ 时等式成立，就是

$a_1+a_2+\cdots+a_k=\dfrac{\sin\frac{k}{2}\alpha\cos\frac{k+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$， ………………………………………………… 6 分

那么 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}=\dfrac{\sin\frac{k}{2}\alpha\cos\frac{k+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\cos(k+1)\alpha$

$$=\frac{\sin\frac{k}{2}\alpha\cos\frac{k+1}{2}\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\cos(k+1)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2k+1}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{2k+3}{2}\alpha-\sin\frac{2k+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$ ……………………………… 7 分

$$=\frac{\sin\frac{2k+3}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\cos\frac{k+2}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式成立．……………………………………………………………8 分

根据①和②，可知等式对任何 $n\in\mathbf{N}$ 都成立．……………………………………………………9 分

（3）$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{k+1}a_k+\cdots-a_{2n}+a_{2n+1}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n+1})-2(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$．……………………………………10 分

$$=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha\cos(n+1)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}-2\frac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$ ……………………………………11 分

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{2n+1}{2}\alpha\cos(n+1)\alpha-2\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$ ……………………12 分

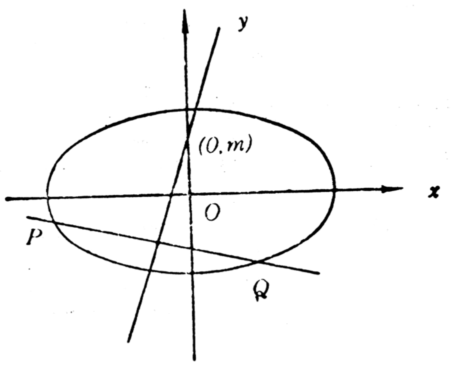
$$=\frac{\cos(n+1)\alpha\left[\sin(n+1)\alpha+\sin n\alpha-2\sin n\alpha\right]}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos(n+1)\alpha\left(2\cos\frac{2n+1}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$ ……………………………………13 分

$$=\frac{\cos(n+1)\alpha\cos\frac{2n+1}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$ ……………………………………14 分

四、本题主要考查直线和二次曲线的基础知识以及计算能力和逻辑推理能力．

解：设所求的取值范围为 M．依两点关于直线对称的定义，可知 $m\in M$ 等价于有直线 $y=-\frac{x}{4}+n$，其中实数 n 是待定的常数，使得这直线与椭圆 C 有两个不同的交点 P，Q，且线段 PQ 的中点落在直线 $y=4x+m$ 上．　2 分



由方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=\frac{-x}{4}+n.\end{cases}$

可得 $\begin{cases}13x^2-8nx+16n^2-48=0, & ①\\ y=\frac{-x}{4}+n. & ②\end{cases}$

记它的解为 $(x_1，y_1)$ 与 $(x_2，y_2)$．……………………………………………………………4 分

首先，因点 $P(x_1，y_1)$ 与点 $Q(x_2，y_2)$ 不同，易知 $x_1\neq x_2$，故

（1）的判别式为正，即有

$64n^2-52(16n^2-48)>0$，

即 $n^2<\dfrac{13}{4}$，

可得 $-\dfrac{\sqrt{13}}{2}<n<\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.　　③……………………………………………………………6 分

其次，因 PQ 的中点 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ 落在直线 $y=4x+m$ 上，而对（1）用韦达定理，可知 $x_1+x_2=\dfrac{8n}{13}$，

从而 $y_1+y_2=-\dfrac{1}{4}(x_1+x_2)+2n=\dfrac{24n}{13}$，

故有 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{24n}{13}\right)=4\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8n}{13}\right)\right]+m$，

即 $m=\dfrac{-4n}{13}$.　④……………………………………………………………………8 分

由③与④可知，m 的取值范围 M 为区间 $\left(-\dfrac{2\sqrt{13}}{13},\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.　……………………………10 分