1987年上海市普通高等学校招生统一考试数学试题

一、(本题满分36分)本题共有12个小题，只要求直接填写结果，填对得3分，否则一律得0分

1．$y=x^2(x\leqslant 0)$的反函数是________.

2．$C_{10}^1+C_{10}^2+\cdots+C_{10}^9+C_{10}^{10}=$________.

3．函数$f(x)=ax^2+bx+c$是偶函数的充要条件是________.

4．设$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为一正方体，E、F分别为BB_1、DC的中点．则AE与D_1F所成的角为________.

5．在底面半径为a，高为$2a$的圆柱中，分别挖去一个底面半径及高均为a的圆锥与一个半径为a的半球，则剩下部分的体积为________.

6．函数$y=2\left|\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$的最小正周期为________.

7．计算函数值：$\arcsin\left(\sin\dfrac{3}{5}\pi\right)=$________.

8．双曲线$4x^4-(y-3)^2=4$的渐近线方程为________.

9．由参数方程$x=2(\sec^2\theta-1)$，$y=2\operatorname{tg}\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$给出的曲线在直角坐标系下的方程__.

10．设$\{a_n\}$为等差数列，已知$a_1=1$，a_5与a_6的算术平均数为19，则该等差数列的公差为________.

11．$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$的展开式中，$x^4$的系数与$\dfrac{1}{x^4}$的系数之差是________.

12．设$2^a=5^b=10$，则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=$________.

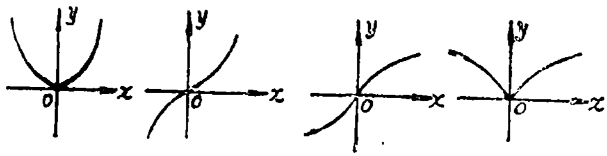
二、(本题满分36分)本题共有12个小题，每一小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得3分，不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内)，一律得0分。

1．设函数$y=\log_2x+3(x\geqslant 1)$，则$y$的值域是(　　)．

(A) $\{y|y\geqslant 2\}$；　(B) $\{y|y>3\}$；

(C) $\{y|y\geqslant 3\}$；　(D) R。

2．下列函数图象中，表示$y=x^{\frac{2}{3}}$的是(　　)．



3．设实数a、b满足$0<a<b$且$a+b=1$，则下列四数中最大的是(　　)。

(A) $\dfrac{1}{2}$；(B) a^2+b^2；(C) $2ab$；(D) a。

4．设$0^\circ<\theta<45^\circ$，则$\cos^2\theta$，$\sin^2\theta$，$\operatorname{ctg}^2\theta$的大小顺序是(　　)。

(A) $\cos^2\theta<\sin^2\theta<\operatorname{ctg}^2\theta$，

(B) $\operatorname{ctg}^2\theta<\sin^2\theta<\cos^2\theta$；

(C) $\sin^2\theta<\cos^2\theta<\operatorname{ctg}^2\theta$；

(D) $\cos^2\theta<\operatorname{ctg}^2\theta<\sin^2\theta$。

5．$\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$等于(　　)。

(A) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$；　(B) $-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$；

(C) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$；　(D) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$。

6．如果圆$x^2+y^2+ax+by+c=0$(a、b、c不全为0)与x轴相切于原点，那么(　　)。

$(A)a=0,\ b\neq0,\ c\neq0$； $(B)b=c=0,\ a\neq0$；
$(C)a=c=0,\ b\neq0$； $(D)a=b=0,\ c\neq0$。

7．直线$x+2y+3=0$的倾斜角为(　　　)。

$(A)arctg(-\frac{1}{2})$； $(B)\ arctg\frac{1}{2}$；

$(C)\ \frac{\pi}{2}+arctg\frac{1}{2}$； $(D)\ \pi-arctg\frac{1}{2}$

8．极坐标方程$\rho=\dfrac{6}{3+2sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}$所表示的图形是(　　　)。

(A) 圆； (B)椭圆；
(C) 双曲线； (D)抛物线。

9．在空间里，下述命题中正确的是(　　　)。

(A)若直线$a//$平面M，直线$b\perp$直线a，则直线$b\perp$平面M；

(B)若平面$M//$平面N，则平面M内任意一条直线$a//$平面N，

(C)若平面M与平面N的交线为a，平面M内的直线$b\perp$直线a，则直线$b\perp$平面N；

(D)若平面N内的两条直线都平行于平面M，则面平$N//$平面M。

10．三个互不重合的平面，能把空间分成n个部分，n的所有可能值为(　　　)。

(A) 4、6、7； (B) 4、5、6、8；
(C) 4、7、8； (D) 4、6、7、8。

11．若直线l_1：$ax+2y+6=0$与直线l_2：$x+(a-1)y+(a^2-1)=0$平行但不重合，则a等于(　　　)。

$(A)-1$或2；$(B)-1$；$(C)2$；$(D)\frac{2}{3}$。

12．七人并排站成一行，如果甲、乙两人必须不相邻，那么不同排法的种数是(　　　)。

(A) 1440；(B) 3600；(C) 4320；(D) 4800

三、(本题满分7分)

设$A=\{x\,|\,log_{\frac{1}{3}}|x-\frac{\pi}{3}|\geqslant log_{\frac{1}{3}}\frac{2\pi}{3},\ x\in R\}$

$B=\{x\,|\,cosx\geqslant0,\ x\in R\}$。求$D=A\cap B$（最后结果以区间形式给出），并在数轴上标出集合$D$

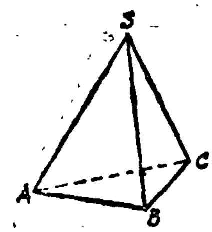
四、(本题满分8分)本题共有3个小题，第1小题满分2分，第2小题满分2分，第3小题4分)。

设三棱锥$S-ABC$的底面为等腰直角三角形，已知该直角三角形的斜边AC长为10，三棱锥的侧棱$SA=SB=SC=13$，求：

(1) 顶点S的到底面距离；

(2) 侧棱SB与底面所成角的大小（用反三角函数表示）；

(3) 二面角$A-SB-C$的大小（用反三角函数表示)。



五、(本题满分9分)

设$A(x_1,\ y_1)$为椭圆$x^2+2y^2=2$上的任意一点，过点A作一条斜率为$-\frac{x_1}{2y_1}$的直线l，又设d为原点至直线l的距离，r_1、r_2分别为点A到椭圆两焦点的距离。试证明$\sqrt{r_1r_2}\cdot d=$常数。

六、(本题满分12分)本题共有2个小题，第1小题满分5分，第2小题满分7分。

在xoy平面上给定一曲线$y^2=2x$。

(1) 设点A的坐标为$(\frac{2}{3},\ 0)$，求曲线上距点A最近的点P之坐标及相应的距离$|PA|$。

(2) 设点A的坐标为$(a,0)$，$a\in R$，求曲线上点距点A的距离之最小值，并写出$d=f(a)$的函数表达式。

七、(本题满分12分)本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分5分，第3小题满分3分。

设复平面上有一系列向量OZ_n $(n=0,\ 1,2,\cdots)$满足如下关系：将$\overrightarrow{OZ}_n$按逆时针方向旋转$\frac{3}{4}\pi$后，再把它的模变为原来的一半，得到$\overrightarrow{OZ}_{n+1}$。记$\overrightarrow{OZ}_n$所对应的复数为$Z_n(n=0,\ 1,2,\cdots)$。

若$Z_0=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$，其中i为虚数单位，

(1) 求Z_n；(2) n为何值时，Z_n为实数？将所有等于实数的Z_n按原有次序排成数列$\{a_n\}$，写出该数列的通项公式；(3) 求$\lim\limits_{k\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_k)$。

答 案 与 略 解

一、(1)$y=-\sqrt{x}$。(2)1023。(3)$b=0$。

(4)$\frac{\pi}{2}$、(5)πa^3、(6)$\frac{\pi}{4}$。 (7)$\frac{3}{5}\pi$。

(8)$2x-y+3=0$与$2x+y-3=0$。 (9)$y^2=2x$。

(10) 4 (11) 0、(12) 1，

二、(1)C、(2)D。 (3)B。 (4)C。
(5)A。 (6)C。 (7)D。 (8)B。
(9)B。 (10)D。 (11)B。 (12)B。

三、$D=(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})\cup(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$

四、(1)$S_0=12$。(2)$a=arcsin\frac{12}{13}$。

(3)$2\,arctg\frac{13}{12}$。

五、$\because r_1^2=(x_1+1)^2+y_1^2,\ r_2^2=(x_1-1)^2+y_1^2$

$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+y_1^2}}$，　$\therefore\sqrt{r_1\cdot r_2}\cdot d=\sqrt{2}$.

六、(1)由$|MA|^2=(x+\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}$ $(x\geqslant 0)$ 可得 $d=|MA|_{min}=\frac{2}{3}$. 点P坐标为(0，0)。

(2)由$|MA|^2=[x-(a-1)]^2+(2a-1)$ $(x\geqslant 0)$

可知$a\geqslant 1$时　$d=|MA|_{min}=\sqrt{2a-1}$。

$a<1$时：$d=|MA|_{min}=|a|$

$d=f(a)=\begin{cases}2\sqrt{a-1}, & a\geqslant 1时,\\ |a|, & a<1时.\end{cases}$

七、(1)由题意可知$Z=\frac{1}{2}(cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4})$，从而$Z_n=Z^n\cdot Z_0=(\frac{1}{2})^{n-2}\cdot(cos\frac{3n+1}{4}\pi+isin\frac{3n+1}{4}\pi)$，(2)由$sin\frac{3n+1}{4}\pi=0$，

可得$n=4k+1$　$(k=0,1,2,\cdots)$

由$Z_{4k+1}=(-1)^{k+1}\cdot(\frac{1}{2})^{4k-1}=(-2)(-\frac{1}{16})^k$

可得　$a_k=(-2)\cdot(-\frac{1}{16})^{k-1}$　$(k=1,2,3,\cdots)$

(3)$\lim\limits_{k\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_k)=-\frac{32}{17}$。

（上海　袁梧　供稿）

（上接第19页）

即$k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant Argz\leqslant k\pi+\frac{2}{3}\pi$ $(k\in Z)$。

第二种方法：若二次三项式$ax^2+bx+c\geqslant 0$，$a>0$则判别式$\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$；若$ax^2+bx+c\leqslant 0$，$a<0$，则$\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$。

利用这个性质证明不等式的关键是要作一个$f_1x^2+f_2x+f_3$(其中f_1、f_2、f_3是含已知条件的实函数)，然后利用判别式推出所要证的不等式。

例3　设a_i、b_i($i=1,2,\cdots,n$)是实数，求证$(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2)\geqslant(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i)^2$

证：当$x\in R$时，$0\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}(a_ix-b_i)^2$

$=(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)x^2-2(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i)x+(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2)$.

故上面关于x的二次三项式判别式$\Delta\leqslant 0$，即

$4(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i)^2-4(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2)\leqslant 0$。

故$(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\ (\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2)$

第三种方法：若$a>0$且$\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$则$ax^2+bx+c\geqslant 0$。

应用这个性质证明不等式的思想方法是把要证明的不等式所有项移到一边，把这一边的代数式整理成关于某个字母的二次三项式（二次项系数大于0），然后确定$\Delta\leqslant 0$，由此断定所要证的不等式成立。

例4　已知a、b、$c\in R$，$a+2b+3c=6$　求证　$a^2+2b^2+3c^2\geqslant 6$。

证：$\because a+2b+3c=6$，$\therefore a=6-2b-3c$

$\therefore a^2+2b^2+3c^2-6=(6-2b-3c)^2+2b^2+3c^2-6$

$=6[b^2+2(c-2)b+2c^2-6c+5]$

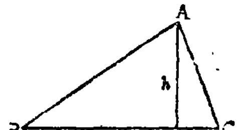
把上式方括号内看作关于b的二次三项式。由于二次项系数为正，且

$\Delta=[2(c-2)]^2-4(2c^2-6c+5)=-4(c-1)^2\leqslant 0$故$b^2+2(c-2)b+2c^2-6c+5\geqslant 0$

即$a^2+2b^2+3c^2\geqslant 6$。

例5　设a、b、c为$\triangle ABC$的边长，S为面积，求证：

$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$。



证：作高AD，令$AD=h$，$BD=m$，$CD=n$，则$m+n=a$，$S=\frac{1}{2}(m+n)h$，$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S=(m+n)^2+(h^2+m^2)+(h^2+n^2)-4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}(m+n)h$

$=2[h^2-\sqrt{3}(m+n)h+m^2+mn+n^2]$

上式方括号内可看作关于h的二次三项式。由于二次项系数为正，且$\Delta=[-\sqrt{3}(m+n)]^2-4(m^2+mn+n^2)=-(m-n)^2\leqslant 0$，$\therefore h^2-\sqrt{3}(m+n)h+m^2+mn+n^2\geqslant 0$，即有$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$。当且仅当$m=n$时，等号成立。即$\triangle ABC$为正三角形时不等式等号成立。