

1987年全国普通高等学校招生统一考试

广东省数学（理工农医类）

第一卷

本卷满分 50 分，共有 25 道选择题，每题都给出代号为 A, B, C, D 的四个结论，其中只有一个结论是正确的。请把正确结论的代号选出，并在答题卷中的相应位置上按答题卷所规定的记号准确标示。每题选对得 2 分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律得 0 分。

1. 函数 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 的定义域是 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, 2]$ C. $[0, 2]$ D. $[-2, 0]$

2. 指数方程 $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$ 的解集是 ()

- A. $\{1\}$ B. $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ C. $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ D. $\{-1, 1\}$

3. 使函数 $y = \cos 2x$ 取得最小值的所有 x 的集合是 ()

- A. $\{x | x = \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ B. $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$
C. $\{x | x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ D. $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

4. 如果圆锥的高和底面直径都等于 a ，则该圆锥的体积为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}a^3$ B. $\frac{\pi}{6}a^3$ C. $\frac{\pi}{12}a^3$ D. $\frac{\pi}{3}a^3$

5. 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上，与直线 $4x + 3y - 12 = 0$ 距离最小的点的坐标是 ()

- A. $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ B. $\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ C. $\left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ D. $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

6. 若复数 $z = (a + i)^2$ 的辐角是 $\frac{3}{2}\pi$ ，则实数 a 的值是 ()

- A. 1 B. -1 C. $-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

7. 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$ 的解集是 ()

- A. $\left\{x \mid \frac{3}{4} \leq x \leq 2\right\}$ B. $\left\{x \mid \frac{3}{4} \leq x < 2\right\}$
C. $\left\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x \leq \frac{3}{4}\right\}$ D. $\{x | x < 2\}$

8. 若 $\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = 3$, 则 $\cos \theta$ 的值是 ()
- A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
9. 在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上, 方程 $\frac{1}{|\sin x|} = \sin x - \cos x$ 的不同的实根个数是 ()
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
10. 用 0, 1, 2, 3 这四个数字, 组成个位数不为 1 的没有重复数字的四位数, 共有 ()
- A. 16 个 B. 14 个 C. 12 个 D. 10 个
11. 设 $f(x) = \frac{2x+1}{4x+3} \left(x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq -\frac{3}{4} \right)$, 则 $f^{-1}(2) =$ ()
- A. $-\frac{5}{6}$ B. $\frac{5}{11}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$
12. 圆锥曲线 $y^2 - 4y + 4x = 0$ 的准线方程是 ()
- A. $x = 0$ B. $x = -1$ C. $x = 1$ D. $x = 2$
13. 设常数 $a > 0$, 椭圆 $x^2 - 2ax + a^2y^2 = 0$ 的长轴是短轴的 2 倍, 则 $a =$ ()
- A. 2 或 $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{2}$
14. 设双曲线的半焦距为 c , 两条准线距离为 d , 且 $c = d$, 则这双曲线的离心率 $e =$ ()
- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 3
15. 设实数 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi \right)$, 那么方程 $\frac{x^2}{\csc \theta - 2} + \frac{y^2}{2 - \sec \theta} = 1$ 所表示的曲线是 ()
- A. 焦点在 y 轴上的椭圆 B. 焦点在 x 轴上的椭圆
C. 焦点在 y 轴上的双曲线 D. 焦点在 x 轴上的双曲线
16. 若正三棱锥的一个侧面的面积与底面的面积的比等于 $\frac{2}{3}$, 则这个三棱锥的侧面和底面所成的二面角是 ()
- A. $\arccos \frac{3}{4}$ B. $\arcsin \frac{3}{4}$ C. 30° D. 60°
17. 设 α, β 是不重合的两个平面, l 和 m 是不重合的两条直线, 那么, $\alpha // \beta$ 的一个充分条件是 ()
- A. $l \subset \alpha, m \subset \alpha$, 且 $l // \beta, m // \beta$ B. $l \subset \alpha, m \subset \beta$, 且 $l // m$
C. $l \perp \alpha, m // \beta$, 且 $l // m$ D. $l // \alpha, m // \beta$, 且 $l // m$
18. 函数 $y = -\operatorname{ctgx} (x \in (0, \pi))$ 的反函数可以写成 ()
- A. $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctgx}$ B. $y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctgx}$
C. $y = \pi - \operatorname{arctgx}$ D. $y = \pi + \operatorname{arctgx}$
19. 设 $(1+x)^3 + (1+x)^4 + \cdots + (1+x)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{50}x^{50}$, 则 $a_3 =$ ()

- A. C_{51}^3 B. C_{51}^4 C. $2C_{50}^3$ D. C_{50}^4

20. 如果实数 a, b, c 不全为负数, 那么 ()

- A. 实数 a, b, c 中, 至少有一个正数 B. 实数 a, b, c 中, 既有正数又有负数
C. 实数 a, b, c 的乘积不为负数 D. 实数 a, b, c 中, 至多有两个负数

21. 平行六面体成为直平行六面体的一个充分必要条件是 ()

- A. 它有两个矩形的侧面 B. 它的一条侧棱垂直于底面的两条边
C. 它有两条侧棱都垂直于底面的一条边 D. 它有两个侧面都垂直于底面

22. 若动点 P 的横坐标 x 和纵坐标 y , 使得 $\lg y, \lg|x|, \lg\left(\frac{y-x}{2}\right)$ 成等差数列, 则动点 p 的轨迹的图形是 ()

23. 若函数 $f(x) = \sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{5}{2}\pi\right) (x \in \mathbf{R})$ 和 $g(x) = \sin(\arccos x) (x \in [-1, 1])$, 则 ()

- A. $f(x)$ 是偶函数而 $g(x)$ 是奇函数 B. $f(x)$ 是奇函数而 $g(x)$ 是偶函数
C. $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数 D. $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数

24. 在直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(0, 3), B(3, 3), C(2, 0)$, 若直线 $x = a$ 将 $\triangle ABC$ 分割成面积相等的两部分, 则实数 a 的值是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

25. 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, 则 $x - 2y$ 的最大值是 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 10 C. 9 D. $5 + 2\sqrt{5}$

第二卷

考生注意: 本卷共五大题, 考生必须全部作答, 满分 70 分.

一、本题满分 15 分. 本题共有 5 小题, 每小题都有用横线表示的空位, 请把你认为合适的内容写在横线上方的空位置. 每个小题满分 3 分.

(1) $\log_2 \sqrt{2} + \log_9 27$ 的值是_____.

(2) 若圆的极坐标方程为 $\rho = 6 \cos \theta$, 则这个圆的半径是_____.

(3) 命题“三个正数 a, b, c 的几何平均数不大于这三个数的算术平均数”用数学符号表示, 可写成“如果_____, 那么_____.”

(4) 已知椭圆的两个焦点是 $F_1(0, -1)$ 和 $F_2(0, 3)$, 并且点 $A(2, 1)$ 在该椭圆上, 那么, 这个椭圆的方程是_____.

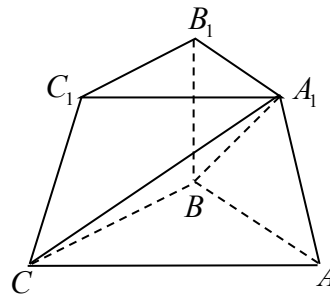
(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} - 3^n}{2^n + 3^{n-1}}$ 的值是_____.

二、本题满分 12 分

在三棱台 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中，侧棱 $B_1B \perp$ 底面 ABC ，且 $\angle ABC = \angle AA_1C = \frac{\pi}{2}$ ， $AB = 2A_1B_1 = 2\text{cm}$ 。

(1) 求证： $BC \perp A_1B$ ， $BC \perp A_1A$ ， $A_1A \perp A_1B$ ；

(2) 求异面直线 A_1A 和 BC 的距离。



三、本题满分 13 分

已知复数 $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ， $u = \cos \beta + i \sin \beta$ ，且 $z + u = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ 。

(1) 求 $\text{tg}(\alpha + \beta)$ 的值；

(2) 求证： $z^2 + u^2 + zu = 0$ 。

四、本题满分 15 分

直线 l 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p \neq 0$) 的焦点，并且与这抛物线相交于 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 两点。

(1) 求证： $4x_1x_2 = p^2$ ；

(2) 求证：对于这抛物线的任何给定的一条弦 CD ，直线 l 不是 CD 的垂直平分线。

五、本题满分 15 分

设实数 $a \neq 0$ ，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a ，公比为 $(-a)$ 的等比数列，记 $b_n = a_n \lfloor \lg |a_n| \rfloor$ ， $n = 1, 2, \dots$ ； $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ， $n = 1, 2, \dots$ ；

(1) 求证: 当 $a \neq -1$ 时, 对任意自然数 n , 都有 $S_n = \frac{a \lg |a|}{(1+a)^2} \left[1 + (-1)^{n+1} (1+n+na) a^n \right]$;

(2) 请问: 当 $0 < a < 1$ 时, 是否存在自然数 M , 使得对任意自然数 n , 都有 $b_n \leq b_M$? 证明你的结论.

1987 数学试题解答及评分标准 (广东省理工农医类)

第一卷

本卷考查基础知识和基本技能。

每一个小题，选对给 2 分，不选、选错或者选出的代号超过一个的，一律得 0 分。25 个小题的给分之和就是本卷全卷的给分。

A 型题答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
答案	C	D	B	C	A	B	B	D	A	B	A	D	A	B	C	D	C

18	19	20	21	22	23	24	25
B	B	D	D	C	D	A	B

第二卷

一、本题考查基础知识和基本技能，只需直接写出结果。

每一个小题，结果正确的，给 3 分。5 个小题的给分之和就是本题全题的给分。

(1) 2 (2) 3 (3) 如果 $a > 0, b > 0, c > 0$, 那么 $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$.

(4) $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$ (5) -3

二、本题主要考查直线，平面和多面体的基础知识，以及空间想象能力和逻辑推理能力。证出第 (1) 小题给 7 分，解出第 (2) 小题给 5 分。

(1) 证: $\because B_1B \perp$ 底面 ABC (题设) 而 $BC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore B_1B \perp BC$, 又 $BC \perp AB$ (题设),

$AB \cap B_1B = B$,

$\therefore BC \perp$ 平面 BB_1A_1A , B 是垂足. 3 分

而 $A_1B \subset$ 平面 BB_1A_1A , $A_1A \subset$ 平面 BB_1A_1A , $\therefore BC \perp A_1B$, $BC \perp A_1A$ 5 分

其次, $AA_1 \perp A_1C$, (题设) $AA_1 \perp BC$, (已证) $BC \cap A_1C = C$,

$\therefore AA_1 \perp$ 平面 A_1BC , 而 $A_1B \subset$ 平面 A_1BC , $\therefore AA_1 \perp A_1B$ 7 分

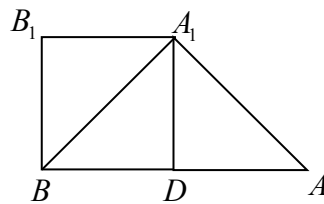
(2) 解: 依设有 $B_1B \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $B_1A_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,

$\therefore BB_1 \perp B_1A_1$, 又 $BA_1 \perp A_1A$ (已证)

$\therefore \angle BB_1A_1 = \angle BA_1A = \frac{\pi}{2}$,

由棱台性质知 $AB \parallel A_1B_1$, $\therefore \angle B_1A_1B = \angle A_1BA$.

$\therefore \triangle A_1B_1B \sim \triangle BA_1A$,



$$\frac{A_1B_1}{A_1B} = \frac{A_1B}{AB}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

依设 $AB = 2A_1B_1 = 2\text{cm}$, $\therefore A_1B_1 = 1\text{cm}$.

$$\therefore A_1B^2 = A_1B_1 \cdot AB = 1 \cdot 2 = 2, \quad A_1B = \sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

由(1)已证 $A_1B \perp AA_1$, $A_1B \perp BC$,

且 $A_1B \cap AA_1 = A_1$, $A_1B \cap BC = B$,

$\therefore A_1B$ 是异面直线 AA_1 与 BC 的公垂线.

$$\therefore A_1A \text{ 和 } BC \text{ 的距离是 } \sqrt{2}\text{cm}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

三、本题主要考查三角函数和复数的基础知识, 以及运算能力. 解出第(1)小题给7分, 证出第(2)小题给6分.

(1) 解: 由设可得 $z + u = (\cos \alpha + \cos \beta) + (\sin \alpha + \sin \beta)i$

$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i,$$

$$\therefore \cos \alpha + \cos \beta = \frac{4}{5},$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{3}{5}; \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{和差化积得 } 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{5}, \quad \textcircled{1}$$

$$2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{4}{5}; \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{ 得 } \text{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{4}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2 \text{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{24}{7}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 证: } \because |z + u| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1, \quad \text{又 } z + u = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left[\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + i \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right]$$

$$\therefore \left| \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right| = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{又 } z^2 + u^2 + zu = [\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos(\alpha + \beta)] + i[\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$= 2 \cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) + i[2 \cos(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$= [2 \cos(\alpha - \beta) + 1][\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$$

$$= [2 \cos(\alpha - \beta) + 1]zu, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \cos(\alpha - \beta) &= 2\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 1 \\ &= 2\left|\cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right|^2 - 1 = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - 1 = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\therefore 2\cos(\alpha - \beta) + 1 = 0,$$

故 $z^2 + u^2 + zu = 0$ 13 分

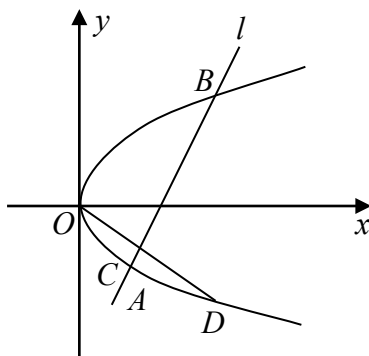
四、本题主要考查直线和抛物线的基础知识，以及运算能力和逻辑推理能力。证得第(1)小题给 8 分，证得第(2)小题给 7 分。

(1) 证：以 $p > 0$ 为例，作图如右。

抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

..... 1 分

依设 $F \in l$ ，且 l 与这抛物线有两个交点。
分两种情况讨论：



(i) 当 $l \perp x$ 轴时， l 的方程为 $x = \frac{p}{2}$,

故 $x_1 = x_2 = \frac{p}{2}$, $4x_1x_2 = p^2$ 3 分

(ii) 当 l 不垂直于 x 轴时， l 的方程为 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right)$, $k \neq 0$.

代入 $y^2 = 2px$ ，得 $x^2 - p\left(1 + \frac{2p}{k^2}\right)x + \frac{p^2}{4} = 0$, 6 分

x_1, x_2 是这方程的根，由韦达定理得 $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}$ ，即 $4x_1x_2 = p^2$.

由 (i), (ii) 证得 (1). 8 分

(2) 证：依题可设 $C\left(\frac{c^2}{2p}, c\right)$, $D\left(\frac{d^2}{2p}, d\right)$ 且有 $c \neq d$. 记 CD 的垂直平分线为 l' ，则 l' 的方程是

$$\left(y - \frac{c+d}{2}\right)(c-d) + \left(x - \frac{c^2+d^2}{4p}\right)\left(\frac{c^2}{2p} - \frac{d^2}{2p}\right) = 0.$$

因 $c-d \neq 0$ ，可化方程为 $y = \frac{c+d}{8p^2}(4p^2 + c^2 + d^2) - \frac{c+d}{2p}x$ (*) 12 分

(i) 当 $F \in l'$ 时，有 $(c+d)(2p^2 + c^2 + d^2) = 0$,

而 $2p^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, ($\because p \neq 0$) 故 $c+d = 0$ ，这时， l' 的方程化为 $y = 0$.

从而， l' 与抛物线 $y^2 = 2px$ 只相交于原点。而 l 与此抛物线有两个不同交点，因而 l' 与 l 不相重合。 l 不是 CD 的垂

直平分线.

(ii) 当 $F \notin l'$ 时, 由于 l 通过 F , 故 l 与 l' 也不相重合, l 不是 CD 的垂直平分线.

综上所述, (2) 得证. 15 分

五、本题主要考查数列的基础知识, 以及分析问题的能力.

证得第 (1) 小题给 9 分, 解出第 (2) 小题给 6 分.

(1) 证: 依设, 有 $a_n = a[-a]^{n-1} = (-1)^{n-1} a^n$,

$\therefore b_n = a_n \lg|a_n| = (-1)^{n-1} na^n \lg|a|, n = 1, 2, \dots$ 2 分

记 $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$,

则有 $S_n = (a \lg|a|) [1 - 2a + 3a^2 + \dots + (-1)^{n-1} na^{n-1}]$ 3 分

$(-a)S_n = (a \lg|a|) [-a + 2a^2 - 3a^3 + \dots + (-1)^n na^n]$ 两式相减,

得 $(1+a)S_n = (a \lg|a|) [1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^{n-1} a^{n-1} - (-1)^n na^n]$ 6 分

$$\because a \neq -1, \therefore S_n = \frac{a \lg|a|}{(1+a)} \left[\frac{1 - (-a)^n}{1 - (-a)} - (-1)^n na^n \right]$$

$$= \frac{a \lg|a|}{(1+a)^2} [1 - (-a)^n - (-1)^n na^n (1+a)]$$

$$= \frac{a \lg|a|}{(1+a)^2} [1 + (-1)^{n+1} (1+n+na)a^n] \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(2) 解: 存在所要求的自然数 M . 证明如下:

$$\because 0 < a < 1, \therefore \lg|a| = \lg a < 0,$$

当 n 是奇数时, $b_n = (-1)^{n-1} na^n \lg a < 0$,

当 n 是偶数时, $b_n = (-1)^{n-1} na^n \lg a > 0$ 10 分

设 k 是自然数, 因 $1 - a^2 \neq 0$, 故 $b_{2k+2} - b_{2k}$

$$= -(2k+2)a^{2k+2} \lg a + 2ka^{2k} \lg a$$

$$= (2a^{2k} \lg a) [-(k+1)a^2 + k]$$

$$= (2a^{2k} \lg a) [(1-a^2)k - a^2]$$

$$= (2a^{2k} \lg a)(1-a^2) \left(k - \frac{a^2}{1-a^2} \right)$$

$$\because 2a^{2k} \lg a < 0, 1-a^2 > 0,$$

$\therefore (b_{2k+2} - b_{2k})$ 与 $\left(k - \frac{a^2}{1-a^2}\right)$ 有相反的正负符号, 或者同为零.13 分

记 K 是不大于 $\frac{a^2}{1-a^2}$ 的最大整数, 则有

$$(b_{2k+2} - b_{2k}) \begin{cases} > 0, & \text{当 } k < K, \\ \geq 0, & \text{当 } k = K, \\ < 0, & \text{当 } k > K; \end{cases}$$

即有 $b_2 < b_4 < \dots < b_{2K} \leq b_{2K+2}, b_{2K+2} > b_{2K+4} > b_{2K+6} > \dots$

而对任何自然数 k , 又有 $b_{2K-1} < 0 < b_{2K+2}$.

所以, 取 $M = 2K + 2$, 则对任何自然数 n , 都有 $b_n \leq b_M$15 分