1988年全国普通高等学校招生统一考试

上海　　数学试题

一、（本题满分30分）本题共有10个小题，只要求直接填写结果，每个空格填对得 3 分，否则一律得零分。

1. 方程$4^x-2^{x+1}-8=0$的解是____。

2. $y=\sqrt{x-1}$的反函数是____。

3. 在极坐标系中，以$\left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$为圆心、$\frac{a}{2}$为半径的圆的方程为____。

4. 参数方程$\begin{cases}x=1-2t\\y=2t^2-t\end{cases}$（$t$为参数）化为普通方程是____。

5. 一圆锥的侧面展开图是圆心角为216°的扇形，则此圆锥的轴截面的半顶角的正弦是____。

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^{n+1}}{1-2+4-\cdots+(-2)^{n-1}}=$____。

7. 函数$y=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$的最小正周期是____。

8. 在$(1+x)^n$的展开式中，若第三项和第六项的系数相等，则$n=$____。

9. 到椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$右焦点的距离与直线$x=6$的距离相等的动点轨迹的方程是____.

10. 从6个运动员中选出4人参加4×100米接力赛，如果甲、乙两人都不能跑第一棒，那末共有____种不同的参赛方案（要求结果用数字表达）.

二、(本题满分30分) 本题共有10个小题，每一个小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得3分，不选、选错或选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

1. 方程$x^4-y^4-4x^2+4y^2=0$所表示的曲线是
(A)双曲线和一个圆; (B)两条相交直线;
(C)两条平行直线和一个圆;
(D)两条相交直线和一个圆.

[答] (　　)

2. 在$\left[-1,\frac{3}{2}\right]$上与函数$y=x$相同的函数是

(A)$y=\arccos(\cos x)$; (B)$y=\arcsin(\sin x)$;
(C)$y=\sin(\arcsin x)$; (D)$y=\cos(\arccos x)$.

[答] (　　)

3. 函数$y=\frac{1+a^x}{1-a^x}$ $(a>0,\ a\neq1)$

(A)是奇函数; (B)是偶函数;
(C)既是奇函数，又是偶函数;
(D)是非奇非偶函数。

[答] (　　)

4. $|x|\leqslant2$是$|x+1|<1$的
(A)必要不充分条件; (B)充分不必要条件;
(C)充分必要条件; (D)既不充分也不必要条件.

[答] (　　)

5. 下列命题中错误的是
(A)若一直线垂直于一平面，则此直线必垂直于这平面上所有直线;
(B)若一个平面通过另一个平面的一条垂线，则这两个平面互相垂直;
(C)若一直线垂直于一个平面的一条垂线，则此直线平行于这个平面;
(D)若平面内的一条直线和这个平面的一条斜线的射影垂直，则它也和这条斜线垂直。

[答] (　　)

6. 若$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，α为第二象限角，则$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$的值为

(A) $\frac{1}{5}$; (B)5; (C)-5; (D)$-\frac{1}{5}$.

[答] (　　)

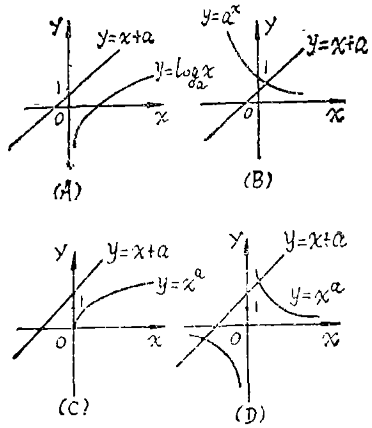
7. 在半径为a的球中，高为$\frac{2}{3}a$的球冠面积与整个球面面积之和为

(A) $\frac{8}{3}\pi a^2$; (B) $\frac{10}{3}\pi a^2$; (C) $\frac{14}{3}\pi a^2$;

(D)$\frac{16}{3}\pi a^2$。

[答] (　　)

8. 下列函数图象中正确的是



[答] (　　)

9. 下列关系中正确的是

(A)$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$;

(B)$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$;

(C)$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$;

(D)$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

[答] (　　)

10. 方程$\sin x=\lg x$的实数根有
(A)1个; (B)2个; (C)3个; (D)无穷多个。

[答] (　　)

三、(本题满分30分) 本题共有4个小题，第1、2小题每题满分7分，第3、4小题每题满分8分。

1. 已知直线l_1: $3x-y+12=0$, l_2: $3x+2y-6=0$.求l_1、l_2和y轴所围成的三角形面积。

2． 设$A=\left\{x \mid x\geqslant\frac{1}{x},\ x\in R\right\}$，

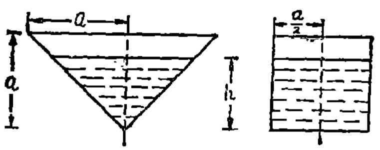
$B=\{x \mid \sqrt{2x+1}<3,\ x\in R\}$．

求$D=A\cap B$．

3． 一个圆锥容器和一个圆柱形容器，它们的轴截面尺寸如图．两容器内盛有的液体的体积正好相等，且液面高度h正好相同．求h．

4． 设方程$x^2+3\sqrt{3}x+4=0$的两个实根为x_1，x_2。

记$\alpha=\mathrm{arc\,tg}x_1$，$\beta=\mathrm{arc\,tg}x_2$．



求：$\alpha+\beta$．

四、（本题满分15分）

设　$y=\log_{\frac{1}{2}}[a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}+1]\ (a>0,\ b>0)$。

求使y为负值的x的取值范围．

五、（本题满分15分）本题共有2个小题，第1小题满分7分，第2小题满分8分．

在棱长都相等的四面体$A-BCD$中，E、F分别为棱AD、BC的中点，连接AF、CE，如图所示．

1． 求异面直线AF、CE所成角的大小；

2． 求CE与底面BCD所成角的大小．

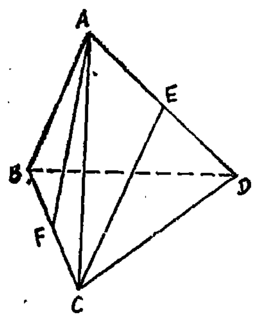
（要求角的大小用反三角函数表示）．

六、（本题满分15分）

复数z_1、z_2、z_3的辐角分别为α、β、γ，又$|z_1|=1$，$|z_2|=k$，$|z_3|=2-k$，且$z_1+z_2+z_3=0$，问k各为何值时，$\cos(\beta-\gamma)$分别取得最大值和最小值，并求出最大值和最小值．

七、（本题满分15分）

本题共有2个小题，第1小题满分5分，第2小题满分10分．



在双曲线$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{13}=1$的一支上不同的三点$A(x_1,\ y_1)$、$B(\sqrt{26},\ 6)$、$C(x_2,\ y_2)$与焦点$F(0,5)$的距离成等差数列．

1． 求y_1+y_2；

2． 证明线段AC的垂直平分线经过某一定点，并求该定点的坐标．

（上海市四平中学　马积祥提供）

解答及评分标准

一、每一小题结果正确的给3分。

1．$x=2$．　2．$y=x^2+1\ (x\geqslant0)$。3．$\rho=a\sin\theta$．

4．$y=\frac{x^2-x}{2}$。　5．$\frac{3}{5}$．　6．6．　7．2．　8．7．

9．$y^2=-4(x-5)$．　10．240．

二、每一小题结果正确的给3分。

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
代　号	D	B	A	A	C	B	D	B	D	C

三、［解］1． 直线l_1、l_2在y轴上的截距分别为12和3，故它们在y轴上所截得的线段的长度为9．l_1与l_2的交点的横坐标为-2．

所以　$S_\Delta=\frac{1}{2}9\times2=9$．

2．　$\because A=\left\{x \mid x\geqslant\frac{1}{x},\ x\in R\right\}$

$=\{x \mid -1\leqslant x<0,\ 或x\geqslant1\}$．

$B=\{x \mid \sqrt{2x+1}<3,\ x\in R\}$

$=\left\{x \mid -\frac{1}{2}\leqslant x<4\right\}$．

$\therefore D=A\cap B=\{x \mid -1\leqslant x<0或x\geqslant1\}$

$\cap\left\{x \mid -\frac{1}{2}\leqslant x<4\right\}$

$=\left\{x \mid -\frac{1}{2}\leqslant x<0或1\leqslant x<4\right\}$．

3．　$\because$圆锥形容器的轴截面的底角为45°，

$\therefore$液面半径　$r=h$．

圆锥形容器内的液体体积为$V_{锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}h^3$．

圆柱形容器内的液体体积为$V_{柱}=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2h$

$=\frac{\pi a^2h}{4}$．

由　$\frac{\pi}{3}h^3=\frac{\pi}{4}a^2h$　得　$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$．

4. 由韦达定理，$x_1+x_2=-3\sqrt{3}$，$x_1x_2=4$.

∴ $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$

$=\dfrac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}=\sqrt{3}$.

∵ $x_1x_2>0$，$x_1+x_2<0$，∴ $x_1<0, x_2<0$.

因此，$\alpha,\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，从而$\alpha+\beta\in(-\pi,0)$，

所以 $\alpha+\beta=-\dfrac{2\pi}{3}$。

四、[解] 要使$y<0$，

只要 $a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}>0$，

即 $b^{2x}\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2x}+2\left(\dfrac{a}{b}\right)^x-1\right]>0$.

由因式分解得 $b^{2x}\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+1+\sqrt{2}\right]$

$\cdot\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+1-\sqrt{2}\right]>0$.

∵ $b^{2x}>0$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+1+\sqrt{2}>0$，

∴ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+1-\sqrt{2}>0$，即$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x>\sqrt{2}-1$.

两端取对数得 $x\lg\dfrac{a}{b}>\lg(\sqrt{2}-1)$ ①

当$a>b>0$时，$\lg\dfrac{a}{b}>0$，

∴ $x>\lg(\sqrt{2}-1)/\lg\left(\dfrac{a}{b}\right)=\lg_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1)$；

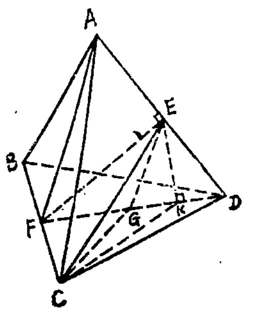
当$b>a>0$时，$\lg\dfrac{a}{b}<0$，

∴ $x<\lg(\sqrt{2}-1)/\lg\left(\dfrac{a}{b}\right)=\lg_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1)$；

当$a=b>0$时，$\lg\dfrac{a}{b}=0$，而$\lg(\sqrt{2}-1)<0$，

① 式恒成立，所以，x为一切实数。

五、[解] 1. 连接DF，取DF中点G，连接



GE，则

$\left.\begin{array}{l}AE=ED\\FG=GD\end{array}\right\}\Rightarrow EG\parallel AF\Rightarrow\angle GEC$为异面直线$AF$、$CE$所成的角。

设棱长为a，则

$AF=CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$EG=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$.连接$GC$，则

$GC=\sqrt{FC^2+FG^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}a$.

由余弦定理可得

$\cos\angle GEC=\dfrac{EG^2+CE^2-GC^2}{2EG\cdot CE}=\dfrac{2}{3}$，

∴ $\angle GEC=\arccos\dfrac{2}{3}$.

即异面直线AF与CE所成角的大小为 $\arccos\dfrac{2}{3}$.

2. 作$EK\perp DF$，设垂足为K，连接KC，则

$\left.\begin{array}{l}AF\perp BC\\DF\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}BC\perp \text{平面}ADF\\BC\subset\text{平面}BCD\end{array}\right\}$

$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\text{平面}ADF\perp\text{平面}BCD\\EK\perp DF\end{array}\right\}\Rightarrow EK\perp\text{平面}BCD\Rightarrow$

$\angle KCE$为EC与平面BCD所成的角。

在△AFD中，连接EF，$EF\perp AD$，

$EF=\sqrt{FD^2-ED^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

∵ $EK\cdot FD=EF\cdot ED$，∴ $EK=\dfrac{EF\cdot ED}{FD}$

$=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$.

∵ $\sin\angle KCE=\dfrac{EK}{CE}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{6}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

∴ $\angle ECK=\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

即CE与底面BCD所成角的大小为 $\mathrm{arc\ sni}\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

六、[解] 设$z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，

$z_2=k\cos\beta+ik\sin\beta$，

$z_3=(2-k)\cos\gamma+i(2-k)\sin\gamma$.

由 $z_1+z_2+z_3=0$ 得

$\cos\alpha+k\cos\beta+(2-k)\cos\gamma=0$，

$\sin\alpha+k\sin\beta+(2-k)\sin\gamma=0$.

于是　$\cos\alpha=(k-2)\cos\gamma-k\cos\beta$,　①

$\sin\alpha=(k-2)\sin\gamma-k\sin\beta$.　②

将①、②式两端平方后相加得

$$1=(k-2)^2+k^2-2(k-2)k\cos(\gamma-\beta).$$

由题设可知$k\neq0$，$k\neq2$，

所以　$$\cos(\beta-\gamma)=\frac{(k-2)^2+k^2-1}{2k(k-2)}$$

$$=1+\frac{3}{2(k-1)^2-2}.\qquad ③$$

$\because$　$|\cos(\beta-\gamma)|\leqslant1$,

$\therefore$　$-2\leqslant\dfrac{3}{2(k-1)^2-2}\leqslant0$,

解得　$\dfrac{1}{2}\leqslant k\leqslant\dfrac{3}{2}$.

由③式及上式知

当$k=1$时　$[\cos(\beta-\gamma)]_{\max}=-\dfrac{1}{2}$;

当$k=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$时　$[\cos(\beta-\gamma)]_{\min}=-1$.

七、[解法一]1.　双曲线的实半轴$a=2\sqrt{3}$，虚半轴$b=\sqrt{13}$，半焦距$c=5$。根据双曲线的定义，得

$$\frac{|AF|}{y_1-\dfrac{a^2}{c}}=\frac{c}{a}.$$

$\therefore$　$|AF|=\dfrac{c}{a}y_1-a=\dfrac{5}{6}\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}$.

同理 $|CF|=\dfrac{5}{6}\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}$,

$|BF|=\dfrac{5}{6}\sqrt{3}\cdot6-2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

$\because$　$|AF|+|CF|=2|BF|$,

$\therefore$　$\left(\dfrac{5}{6}\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}\right)+\left(\dfrac{5}{6}\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}$.

解得　$y_1+y_2=12$.

2.　线段AC的中点为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},6\right)$，由题设可知$y_1\neq y_2$,

故它的垂直平分线l的方程为

$$y-6=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

由双曲线的一支关于实轴的对称性可知，若l经过某一定点，则该定点必在y轴上。因此只需证l与y轴的交点为定点即可。

设l与y轴的交点为$D(0,y_0)$，故

$$y_0-6=\frac{x^2_1-x^2_2}{2(y_1-y_2)}.\qquad ①$$

$\because$　$A(x_1,\ y_1)$、$C(x_2,\ y_2)$在双曲线上,

$\therefore$　$x^2_1=\dfrac{13}{12}(y^2_1-12)$，　$x^2_2=\dfrac{13}{12}(y^2_2-12)$,

$$x^2_1-x^2_2=\frac{13}{12}(y^2_1-y^2_2)$$

$$=\frac{13}{12}(y_1+y_2)(y_1-y_2)=13(y_1-y_2).\qquad ②$$

将②式代入①式得　　$y_0-6=\dfrac{13}{2}$，$y_0=\dfrac{25}{2}$.

因为y_0的值与A、C点的坐标无关，所以D为定点，即线段AC的垂直平分线经过定点$D\left(0,\dfrac{25}{2}\right)$.

[解法二]　$|BF|=\sqrt{(\sqrt{26}-0)^2+(6-5)^2}$

$=\sqrt{26+1}=3\sqrt{3}$,

$|AF|=\sqrt{x^2_1+(y_1-5)^2}$.

$\because$　$A(x_1,\ y_1)$在双曲线上,

$\therefore$　$x^2_1=\dfrac{13y^2_1-156}{12}$.

从而　$|AF|^2=\dfrac{13y^2_1-156}{12}+y^2_1-10y_1+25$

$=\dfrac{1}{12}(25y^2_1-120y_1+144)$

$=\dfrac{1}{12}(5y_1-12)^2$.

由题设可知　$y_1\geqslant\sqrt{12}$.　$\therefore$ $5y_1-12>0$.

$\therefore$　$|AF|=\dfrac{1}{\sqrt{12}}(5y_1-12)$.

同理可得 $|CF|=\dfrac{1}{\sqrt{12}}(5y_2-12)$.

$\because$　$|AF|+|CF|=2|BF|$,

$\therefore$　$\dfrac{1}{\sqrt{12}}(5y_1-12+5y_2-12)=6\sqrt{3}$.

即得　　$y_1+y_2=12$.

2.　由双曲线的一支关于实轴的对称性可知，若线段AC的垂直平分线经过某一定点，则该点必在y轴上，因此只需证AC的垂直平分线与y轴的交点为定点即可。

设AC的垂直平分线与y轴的交点为$D(0,y_0)$.

$\because$　$|AD|=|CD|$，即　$x^2_1+(y_1-y_0)^2=x^2_2+(y_2-y_0)^2$,

$\therefore$　$\dfrac{13y^2_1-156}{12}+y^2_1-2y_1y_0+y^2_0$

$$=\frac{13y_2^2-156}{12}+y_2^2-2y_2y_0+y_0^2,$$

化简后得

$25(y_1+y_2)(y_1-y_2)+24(y_2-y_1)y_0=0$。由题设知$y_1\neq y_2$。

$$\therefore \quad 25(y_1+y_2)-24y_0=0,$$

解得 $$y_0=\frac{25\times 12}{24}=\frac{25}{2}.$$

因为y_0与A、C点的坐标无关，故D为定点，即线段AC的垂直平分线通过定点$D\left(0,\frac{25}{2}\right)$。

［注］ 第2小题的证明中，未作分析直接得交点D的不扣分。