附录Ⅳ

一九八八年全国普通高等学校招生统一考试
广东省数学试题与解答(文史类)

试　　题

第一卷

本卷满分 50 分，共有 25 个选择题，每题都给出代号为 A，B，C，D 的四个结论，其中只有一个结论是正确的。请把正确结论的代号选出，并在答题卷中的相应位置上按答题卷所规定的记号准确标示。每题选对得 2 分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律得零分。

(1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_7=6$，$a_9=9$，那么 $a_5=$

(A) 3。　　(B) 4。

(C) $\frac{3}{2}$。　　(D) 2。

(2) 指数方程 $2+3^{x-1}=9^{x-\frac{1}{2}}$ 的解是

(A) 0。　　(B) 1。

(C) 2。　　(D) $\frac{1}{2}$。

(3) 直线 $3x-2y=6$ 在 y 轴上的截距是

(A) 3。　　(B) -3。

(C) 2。　　(D) $\frac{3}{2}$。

(4) 设集合 $P=\left\{x\,\middle|\,x=\sin\frac{m\pi}{6},\ m\in N\right\}$，

$$Q=\left\{x \,\middle|\, x=\sin\frac{n\pi}{12},\quad n\in N\right\},$$

那么，关于集合P和Q有

(A) $P\supset Q$。　　　　(B) $P\subset Q$。

(C) $P=Q$。　　　　(D) $P\cap Q=\varnothing$。

(5) 用1，2，3，4，5这五个数字，组成没有重复数字的五位数，那么在这些五位数中，是偶数的总共有

(A) 24个。　　　　(B) 48个。

(C) 60个。　　　　(D) 72个。

(6) 当α是第二象限的角时，$\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}-\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\sec\alpha}=$

(A) 3。　　　　(B) 1。

(C) -1。　　　　(D) -3。

(7) 如果$\operatorname{tg}A+\operatorname{ctg}A=m$，那么$\sin 2A=$

(A) $\dfrac{1}{m}$。　　　　(B) $\dfrac{1}{m^2}$。

(C) $2m$。　　　　(D) $\dfrac{2}{m}$。

(8) 设a，b是异面直线，那么

(A) 必然存在唯一的一个平面同时平行于直线a和直线b。

(B) 必然存在唯一的一个平面同时垂直于直线a和b。

(C) 过直线a存在唯一的一个平面垂直于直线b。

(D) 过直线a存在唯一的一个平面平行于直线b。

(9) 当$a\neq 0$时，方程$x^2+y^2+ax-ay=0$所表示的图形

(A) 关于x轴对称。

(B) 关于y轴对称。

(C) 关于直线 $y+x=0$ 对称。

(D) 关于直线 $y-x=0$ 对称。

(10) 设 θ 是第四象限的角，那么方程 $(\sin\theta)x^2+y^2=\sin2\theta$ 所表示的曲线是

(A) 焦点在 x 轴上的双曲线。

(B) 焦点在 y 轴上的双曲线。

(C) 焦点在 x 轴上的椭圆。

(D) 焦点在 y 轴上的椭圆。

(11) 抛物线 $y^2=4x-2$ 的准线的方程是

(A) $x=\frac{1}{4}$。 (B) $x=-\frac{1}{2}$。

(C) $x=0$。 (D) $x=-1$。

(12) 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，作直线与此抛物线相交于两点 P 和 Q，那么线段 PQ 中点的轨迹的方程是

(A) $y^2=2x-1$。 (B) $y^2=-2x+1$。

(C) $y^2=2x-2$。 (D) $y^2=-2x+2$。

(13) 函数 $y=\sqrt{x-2}+1$ $(x\geqslant2)$ 的反函数是 $y=$

(A) $2-(x-1)^2$ $(x\geqslant1)$。

(B) $2+(x-1)^2$ $(x\geqslant1)$。

(C) $2-(x-1)^2$ $(x\geqslant2)$。

(D) $2+(x-1)^2$ $(x\geqslant2)$。

(14) 如果奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，那么 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上

(A) 必定是减函数。

(B) 必定是增函数。

(C) 既可能是减函数也可能是增函数。

(D) 不--定具有单调性。

(15) 已知正三棱台上下底面的边长分别是3 cm 和6 cm，斜高是$\sqrt{3}$ cm，那么侧面和底面所成的二面角等于

(A) $\frac{\pi}{6}$。　　(B) $\frac{\pi}{4}$。

(C) $\frac{\pi}{3}$。　　(D) $\frac{5\pi}{12}$。

(16) "平面α内有无穷多条直线都和直线l平行"是"$l \parallel \alpha$"的

(A) 充分而不必要的条件。

(B) 必要而不充分的条件。

(C) 必要且充分的条件。

(D) 既不充分又不必要的条件。

(17) 函数 $f(x)=2+2x-x^2$ $(x\in R)$ 的值域是

(A) $(-\infty, 1)$。　　(B) $(-\infty, 1]$。

(C) $(-\infty, 3)$。　　(D) $(-\infty, 3]$。

(18) 下列函数中，在区间$(-\infty, +\infty)$上是减函数的只有

(A) $y=x^{\frac{1}{3}}$。　　(B) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$。

(C) $y=3^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x$。　　(D) $y=-3^x$。

(19) 与不等式 $\frac{x-3}{2-x}\geqslant 0$ 同解的不等式是

(A) $(x-3)(2-x)\geqslant 0$。　　(B) $(x-3)(2-x)>0$。

(C) $\frac{2-x}{x-3}\geqslant 0$。　　(D) $\lg(x-2)\leqslant 0$。

(20) $\operatorname{tg}10^\circ \operatorname{tg}20^\circ+\sqrt{3}(\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}20^\circ)=$

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.　　　　(B) 1.

(C) $\sqrt{3}$.　　　　(D) $\sqrt{6}$.

(21) 函数值 tg 224°，sin 136°，cos 310° 的大小关系是

(A) tg 224°<sin 136°<cos 310°.

(B) sin 136°<cos 310°<tg 224°.

(C) cos 310°<sin 136°<tg 224°.

(D) cos 310°<tg 224°<sin 136°.

(22) 函数 $y=\dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}$ $(x\in R)$的最大值是

(A) $\dfrac{5}{3}$.　　　　(B) $\dfrac{5}{2}$.

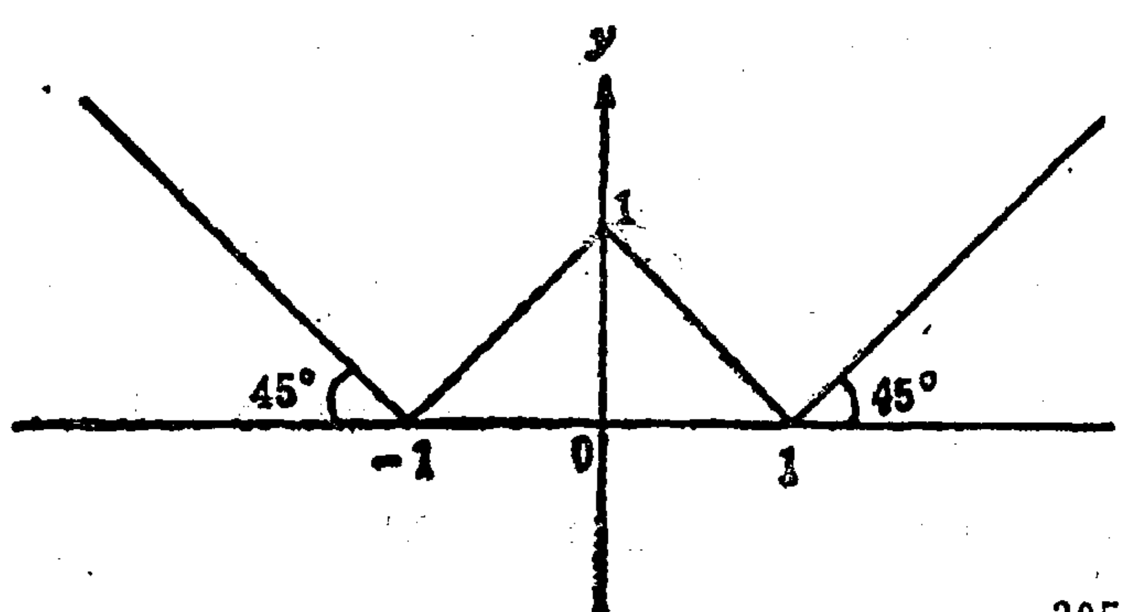
(C) 3.　　　　(D) 5.

(23) 曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与直线 $y=k(x-2)+2$ 有两个交点时，实数 k 的取值范围是

(A) $\left(\dfrac{3}{4},\ 1\right]$.　　　　(B) $\left(\dfrac{3}{4},\ +\infty\right)$.

(C) $(1,\ +\infty)$.　　　　(D) $\left[1,\ \dfrac{5}{4}\right)$.

(24) 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如下



那么$f(x)=$

(A) $\sqrt{x^2-2x+1}$。　　(B) $\sqrt{x^2-2|x|+1}$。

(C) $|x^2-1|$。　　(D) $x^2-2|x|+1$。

(25) 设点$A(-2,\sqrt{3})$，F为椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$的右焦点，点$M$在该椭圆上移动，当$|AM|+2|MF|$取最小值时，点$M$的坐标是

(A) $(0,2\sqrt{3})$。　　(B) $(0,-2\sqrt{3})$。

(C) $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$。　　(D) $(-2\sqrt{3},\sqrt{3})$。

第二卷

考生注意：本卷共五大题，考生必须全部作答，满分70分。

一、(本题满分15分)本题共有5小题，每小题都有用横线表示的空位，请把你认为合适的内容写在横线上方的空位里。每个小题满分3分。

(1) 已知点$A(1,0)$和$B(2,1)$，那么线段AB的垂直平分线的方程是________________。

(2) $\cos10°\cos55°+\cos80°\cos35°$的值等于______。

(3) 函数$y=|\sin x|$的最小正周期是______。

(4) 设复数$z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$，那么，$z$的共轭复数$\bar{z}$的代数形式是__________。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-(2n)}{n-1}$的值是

__________。

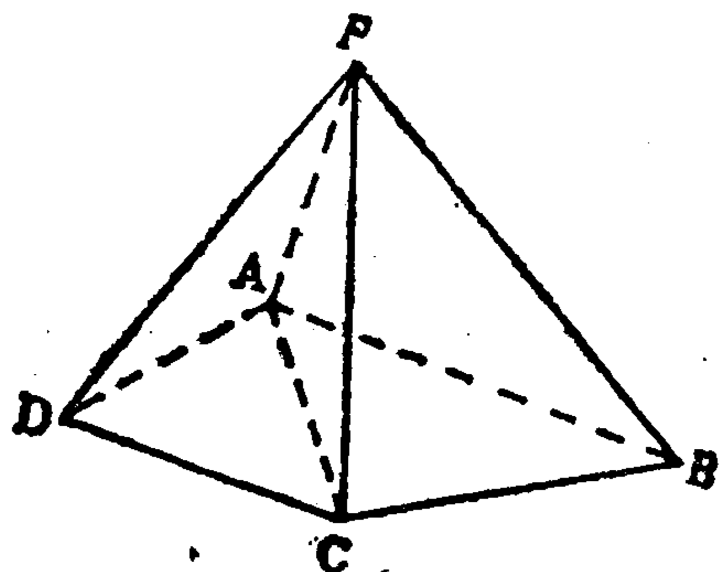
二、(本题满分13分) 设复数$z=-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$，

记 $u=\left(\frac{4}{z}\right)^8$.

（1）求 $|u|$ 和 $\arg u$ 的值；

（2）求实数 x 和 y，使 $\frac{x}{z}+\frac{y}{u}=z+2u$。

三、（本题满分14分） 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PD\perp DC$，$DC\parallel$ 侧面 PAB。



（1）求证：$DA\perp AB$；

（2）又设 $PB=PC$，且 $DC=PA=3$ cm，$DA=4$ cm，求这个四棱锥的体积。

四、（本题满分14分） 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{\pi}{3}n^2+c$，式中 c 是常数，$n=1,2,\cdots$。

（1）如果 $c\neq 0$，求证：$\{a_n\}$ 不是等差数列；

（2）如果 $c=0$，求证：对任意大于 1 的自然数 n，和数

$$\cos^2(a_{n-1})+\cos^2(a_n)+\cos^2(a_{n+1})$$

是一个与 n 无关的常数，并求出这个常数值。

五、（本题满分14分） 设 k 和 r 是实数，且 $r>0$，使得：直线 $y=kx+1$ 既与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，又与双曲线 x^2-y^2

$=r^2$ 有两个交点。

求证：$\frac{1}{r^2}-k^2=1$，且$|k|\neq 1$；

) 试问：直线 $y=kx+1$ 能否经过双曲线 $x^2-y^2=r^2$ 的焦点？为什么？

解　　答

第一卷

本卷考查基础知识和基本技能。

每一个小题，选对给 2 分，不选、选错或者选出的代号超过一个的，一律得 0 分，25个小题的给分之和就是本卷全卷的给分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
答案	B	B	B	B	B	C	D	D	C	A	B	C	B	B	C	B	D	D	D	B	C	C	A	B	C

第二卷

一、本题考查基础知识和基本技能，只需直接写出结果．每一个小题，结果正确的，给 3 分．5 个小题的给分之和就是本题全题的给分．

(1) $y=-x+2$。　　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

(3) π。　　(4) $\sqrt{3}-i$。

(5) -1。

二、本题主要考查复数的基础知识，以及运算能力。解出第(1)小题给6分。解出第(2)小题给7分。

〔解法一〕 $\because$ (1) $|z|=\sqrt{6+2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，

$\therefore$ $|u|=\left(\dfrac{4}{|z|}\right)^3=\left(\dfrac{4}{2\sqrt{2}}\right)^3=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$。

2分

又复数z所对应的点在第二象限。

设z的辐角主值为θ，

则有 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

$\therefore$ $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$。

因此u的辐角$=-\dfrac{5\pi}{6}\times 3+2k\pi$，其中 $k\in J$。

由于辐角主值满足 $0\leqslant-\dfrac{15\pi}{6}+2k\pi<2\pi$。

因此可得u的辐角主值是$\dfrac{3}{2}\pi$。 6分

〔解法二〕 $\because$ $z=2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5}{6}\pi\right).$$

$$\therefore\quad \frac{4}{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

即 $\left(\dfrac{4}{z}\right)^3=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{21\pi}{6}+i\sin\dfrac{21\pi}{6}\right)$

$$\left(=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)\right.$$ 4分

∴ 可得 $|u|=2\sqrt{2}$。

$$\arg u=\frac{3}{2}\pi。$$ 6分

(2)〔解法一〕 由(1)知 $u=-2\sqrt{2}\,i$,

代入 $\frac{x}{z}+\frac{y}{u}=z+2u$,

有 $\frac{x}{8}(-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i)+\frac{yi}{2\sqrt{2}}$

$$=(-\sqrt{6}+\sqrt{2}i)-4\sqrt{2}i,$$

整理得：$-\frac{\sqrt{6}}{8}x+\left(\frac{y}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}x}{8}\right)i$

$$=-\sqrt{6}-3\sqrt{2}\,i,$$ 9分

∴ $-\frac{\sqrt{6}}{8}x=-\sqrt{6}$,

$$\frac{y}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}x}{8}=-3\sqrt{2},$$

得 $x=8$, $y=-8$。 13分

〔解法二〕 由(1)知 $u=-2\sqrt{2}i$, ∴ $\bar{u}=-u$。

∵ $\frac{x}{z}+\frac{y}{u}=z+2u$, ①

两边取共轭，得：

$$\frac{x}{\bar{z}}-\frac{y}{u}=\bar{z}-2u。$$ ② 8分

①+②得：

$$x\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)=z+\bar{z},$$

$\therefore\quad x=z\cdot\bar{z}=|z|^2=8$。 11分

①－②得：

$$x\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}\right)+\frac{2y}{u}=(z-\bar{z})+4u,$$

即 $(\bar{z}-z)+\dfrac{2y}{u}=(z-\bar{z})+4u,$

$\therefore\quad y=u(z-\bar{z})+2u^2=-2\sqrt{2}i(2\sqrt{2}i)-2\cdot8$

$=8-16=-8$。 13分

三、本题主要考查直线、平面及多面体的基础知识，以及逻辑推理能力和空间想象能力。证出第(1)小题给7分，解出第(2)小题给7分。

(1)〔证〕 依设$PA\perp$底面AC，A是垂足，

$\therefore$ DA是斜线PD在底面AC上的射影。由题设$PD\perp DC$，而$DC\subset$底面AC，

$\therefore$ $DA\perp DC$(三垂线定理的逆定理)， 3分

又由题设 $DC\,/\!/$ 侧面PAB，

而且过DC的平面AC和侧面PAB交于AB，

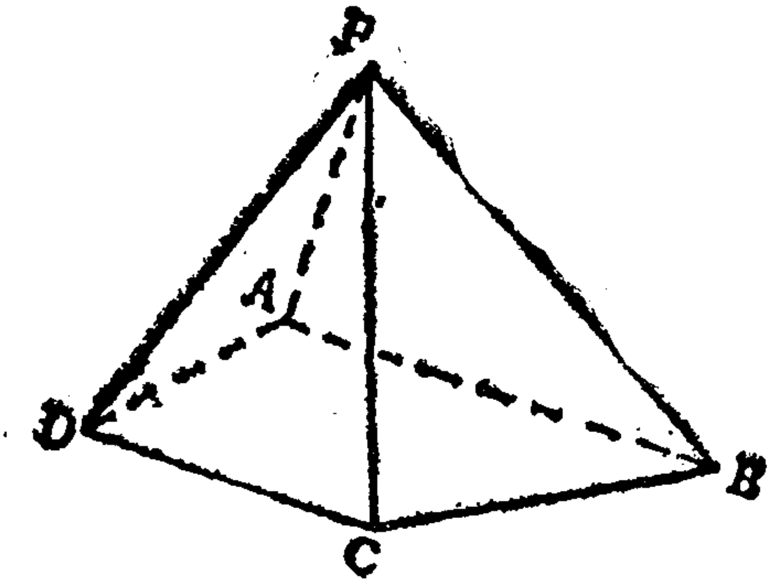
$\therefore$ $DC\,/\!/\,AB$，

$\because$ $DA\perp DC$，

$\therefore$ $AB\perp DA$。 7分

(2)〔解法一〕 依设 $PA\perp$底面AC，而$DA\subset$底面AC，$AB\subset$底面AC，

$\therefore$ $PA\perp DA$。$PA\perp AB$。



又由题设　$PD \perp DC$.

$\therefore$　$\triangle PAD$，$\triangle PDC$，$\triangle PAB$ 都是直角三角形，

$\therefore$　$PD = \sqrt{PA^2 + DA^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$　cm，

$PC = \sqrt{PD^2 + DC^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$　cm.

又由题设　$PB = PC$，

$\therefore AB = \sqrt{PB^2 - PA^2} = \sqrt{34 - 9} = 5$　cm.　11分

在四边形$ABCD$中，$\because DC \parallel AB$，

$DA \perp AB$，且　$AB \neq DC$，$\therefore ABCD$ 是直角梯形，

$\therefore S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16\ \text{cm}^2$，

$\therefore V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot PA = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 3 = 16\ \text{cm}^3$.　　14分

〔解法二〕　连结AC，

$\because$　$PA \perp$底面AC，A是垂足，

$\therefore$　AC，AB分别是斜线PC，PB在底面AC上的射影.

依题设：$PB = PC$，

$\therefore \quad AC = AB$（相等的斜线段的射影相等）。

又由(1)已证 $\quad DC \perp DA$，

$\therefore \quad \triangle ADC$ 是直角三角形，

$\therefore \quad AC = \sqrt{DA^2 + DC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad \text{cm}$。

因而 $AB = 5 \quad \text{cm}$。 11分

以下同〔解法一〕

四、本题主要考查数列及三角函数的基础知识，以及运算能力和综合分析能力。证出第(1)小题给7分，解出第(2)小题给7分。

(1) 〔证法一〕 $\because \quad a_1 = S_1 = \dfrac{\pi}{3} + c$，

当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= \left(\frac{\pi}{3} n^2 + c\right) - \left[\frac{\pi}{3}(n-1)^2 + C\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}(2n-1), \qquad 4分$$

$\therefore$ 当 $n \geqslant 3$ 时，$a_n - a_{n-1} = \dfrac{\pi}{3}(2n-1) - \dfrac{\pi}{3}(2n-3)$

$$= \frac{2}{3}\pi.$$

但 $a_2 - a_1 = \pi - \left(\dfrac{\pi}{3} + c\right) = \dfrac{2}{3}\pi - c$，

依题设 $\quad c \neq 0$，$\therefore \dfrac{2}{3}\pi - c \neq \dfrac{2}{3}\pi$，

$\therefore \{a_n\}$ 不是等差数列。 7分

〔解法二〕 $\because \quad a_1=S_1=\frac{\pi}{3}+c,$

又 $\quad S_2=\frac{\pi}{3}\cdot 4+c=a_1+a_2,$

$\therefore \quad a_2=\pi,$

又 $\quad S_3=\frac{\pi}{3}\cdot 9+c=a_1+a_2+a_3,$

$\therefore \quad a_3=\frac{5}{3}\pi,$ 4 分

因此有：$a_3-a_2=\frac{2}{3}\pi,$

$$a_2-a_1=\frac{2}{3}\pi-c.$$

依题设 $c\neq 0$，$\therefore \quad a_3-a_2\neq a_2-a_1,$

$\therefore \{a_n\}$ 不是等差数列。 7 分

（2）〔证法一〕 $\because c=0$，$\therefore \quad a_1=S_1=\frac{\pi}{3},$

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{\pi}{3}n^2\right)-\left[\frac{\pi}{3}(n-1)^2\right]$

$=\frac{\pi}{3}(2n-1),$

因此 $\quad a_n=\frac{\pi}{3}(2n-1)$，当 $\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$ 9 分

当 $\quad n\geqslant 2$ 时，

$$a_{n-1}=\frac{\pi}{3}(2n-3),\quad a_{n+1}=(2n+1),$$

于是 $\quad \cos^2 a_{n-1}+\cos^2 a_n+\cos^2 a_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2a_{n-1}$

$+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2a_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2a_{n+1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\left[\frac{2}{3}\pi\right.$

$\left.(2n-1)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{3}(2n-3)+\cos\frac{2\pi}{3}(2n+1)\right]$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\quad\cos\frac{2\pi}{3}(2n-1)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$

$\cdot(2n-1)\cdot\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}$

$\cdot(2n-1)+\cos\frac{2\pi}{3}(2n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

于是证得，当$n\geqslant 2$时，$\cos^2 a_{n-1}+\cos^2 a_n+\cos^2 a_{n+1}$

与n无关，且等于常数$\frac{3}{2}$。　　　　　　　　14分

〔证法二〕　当$c=0$时，$a_1=S_1=\frac{1}{3}\pi$，

当　$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{\pi}{3}n^2-\frac{\pi}{3}(n-1)^2$

$$=\frac{\pi}{3}(2n-1)。$$

因此对任意自然数n，有$a_n=\frac{\pi}{3}(2n-1)$。

当$n\geqslant 2$时，$a_n-a_{n-1}=\frac{\pi}{3}(2n-1)-\frac{\pi}{3}(2n-3)=\frac{2}{3}\pi$，

即数列$\{a_n\}$是公差为$\frac{2}{3}\pi$的等差数列。

因此，当$n\geqslant 2$时有：

$$a_{n-1}=a_n-\frac{2}{3}\pi,$$

$$a_{n+1}=a_n+\frac{2}{3}\pi,$$

$$\therefore \cos a_{n-1}=\cos\left(a_n-\frac{2}{3}\pi\right)=\cos a_n\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+\sin a_n$$

$$\cdot\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=-\frac{1}{2}\cos a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_n,$$

$$\cos a_{n+1}=\cos\left(a_n+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos a_n\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-\sin a_n\cdot\sin\frac{2}{3}\pi.$$

$$=-\frac{1}{2}\cos a_n-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_n.$$

$$\therefore\quad \cos^2(a_{n-1})+\cos^2 a_n+\cos^2 a_{n+1}=\left(-\frac{1}{2}\cos a_n\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_n\right)^2+\cos^2 a_n\left(-\frac{1}{2}\cos a_n-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_n\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\cos^2 a_n+\frac{3}{4}\sin^2 a_n+\cos^2 a_n+\frac{1}{4}\cos^2 a_n+\frac{3}{4}\sin^2 a_n$$

$$=\frac{3}{2}\left[\cos^2 a_n+\sin^2 a_n\right]=\frac{3}{2}.$$

于是，证得当 $n\geqslant 2$ 时，$\cos^2 a_{n-1}+\cos^2 a_n+\cos^2 a_{n+1}$

与 n 无关，且等于常数$\frac{3}{2}$。 **14分**

〔证法三〕 当$c=0$时，$a_1=S_1=\frac{1}{3}\pi$,

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{\pi}{3}n^2-\frac{\pi}{3}(n-1)^2$

$$=\frac{\pi}{3}(2n-1).$$

因此对任意自然数n，有$a_n=\frac{\pi}{3}(2n-1)$。

当$n\geqslant 2$时，$a_r-a_{n-1}=\frac{\pi}{3}(2n-1)-\frac{\pi}{3}(2n-3)=\frac{2}{3}\pi$，

即数列$\{a_n\}$是公差为$\frac{2}{3}\pi$的等差数列。

当$n=2$时，$\cos^2 a_1+\cos^2 a_2+\cos^2 a_3=\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\pi$

$+\cos^2\frac{5}{3}\pi=(\frac{1}{2})^2+(-1)^2+(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$　　11分

下面利用数学归纳法证明：对于$n\geqslant 2$的任意自然数，

$\cos^2 a_{n-1}+\cos^2 a_n+\cos^2 a_{n+1}=\frac{3}{2}$。

(i) 当$n=2$时，已证$\cos^2 a_1+\cos^2 a_2+\cos^2 a_3=\frac{3}{2}$，

即结论成立。

(ii) 设当$n=k\geqslant 2$时，有

$$\cos^2 a_{k-1}+\cos^2 a_k+\cos^2 a_{k+1}=\frac{3}{2}.$$

则当$n=k+1$时，

$\because$　$a_{k+2}=a_{k-1}+3\cdot\frac{3}{2}\pi$，

$\therefore$　$\cos^2 a_k+\cos^2 a_{k+1}+\cos^2 a_{k+2}$

$$=\cos^2 a_k+\cos^2 a_{k+1}+\cos^2\left(a_{k-1}+\frac{6}{3}\pi\right)$$

$$=\cos^2 a_{k-1}+\cos^2 a_k+\cos^2 a_{k+1}=\frac{3}{2}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，结论也成立。

根据(i)、(ii)可知，对于 $n\geqslant 2$ 的任意自然数，

$$\cos^2 a_{n-1}+\cos^2 a_n+\cos^2 a_{n+1}=\frac{3}{2}.$$

五、本题主要考查直线、圆和双曲线的基础知识，以及逻辑推理能力和综合分析能力。证出第(1)小题给8分，解出第(2)小题给6分。

(1)〔证法一〕 ∵ 直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，

∴ 有：
$$\frac{|-1|}{\sqrt{1+k^2}}=r.$$

两边平方得：

$$\frac{1}{1+k^2}=r^2.$$

∵ $r^2\neq 0$,

因而有：
$$1+k^2=\frac{1}{r^2},$$

∴
$$\frac{1}{r^2}-k^2=1.$$
4分

由于直线 $y=kx+1$ 与双曲线 $x^2-y^2=r^2$ 的交点的坐标(x, y)应满足方程组

$$\begin{cases} y=kx+1, & ① \\ x^2-y^2=r^2. & ② \end{cases}$$

①代入②得：$x^2-k^2x^2-2kx-1-r^2=0$,

即：$(1-k^2)x^2-2kx-(1+r^2)=0$。 ③

依设，交点数为 2，且对任意实数 k，直线不平行 y 轴，故③有不同的两个实根，

于是 x^2 的系数 $1-k^2\neq 0$，即 $k^2\neq 1$ ∴ $|k|\neq 1$。 8分

〔证法二〕 ∵ 直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 的交点的坐标 (x,y) 应满足方程组

$$\begin{cases} y=kx+1, & ① \\ x^2+y^2=r^2. & ② \end{cases}$$

①代入②得：

$$(1+k^2)x^2+2kx+1-r^2=0 \qquad ③$$

依题设直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，∴ 方程③只能有一个解，因此它的判别式 $=0$，即：$4k^2-4(1+k^2)(1-r^2)=0$。

∴有 $4k^2r^2+4r^2-4=0$

由于 $r^2\neq 0$，

因此有：$\frac{1}{r^2}-k^2=1$。 4分

现用反证法证明 $|k|\neq 1$：

若 $k=1$，由于直线 $y=x+1$ 与双曲线 $x^2-y^2=r^2$ 的交点的坐标 (x,y) 满足方程组

$$\begin{cases} y=x+1, & ④ \\ x^2-y^2=r^2. & ⑤ \end{cases}$$

④代入⑤得：$2x+1+r^2=0$，

即直线 $y=x+1$ 与双曲线 $x^2-y^2=r^2$ 只有一个交点，与题设矛盾，因此证得 $k\neq 1$，同理可证：$k\neq -1$。

综合以上情况，知 $|k|\neq 1$ 8分

(2)〔证法一〕 由 $x^2-y^2=r^2$，知双曲线的两个焦点是 $F_1(-\sqrt{2}r,\ 0)$和 $F_2(\sqrt{2}r,\ 0)$。 9分

如果直线 $y=kx+1$ 经过 F_1，那么有

$$-\sqrt{2}rk+1=0,$$

即 $$\frac{1}{r}=\sqrt{2}k.$$

又∵直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，由(1)已证得

$$\frac{1}{r^2}-k^2=1,$$

因此有 $$(\sqrt{2}k)^2-k^2=1,$$

得 $k^2=1$，与$|k|\neq 1$矛盾，因此，直线 $y=kx+1$不可能通过双曲线 $x^2-y^2=r^2$ 的左焦点 F_1。

同理可证，直线 $y=kx+1$ 也不可能通过双曲线 $x^2-y^2=r^2$ 的右焦点 F_2。 14分

〔证法二〕 由(1)知 $\frac{1}{r^2}-k^2=1$，

又 $r>0$ 得 $r=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，

故双曲线 $x^2-y^2=r^2$ 的焦点 $F_1(-\sqrt{2}r,0)$ 和 $F_2(\sqrt{2}r,\ 0)$ 为

$$F_1\left(-\sqrt{\frac{2}{1+k^2}},\ 0\right)和\ F_2\left(\sqrt{\frac{2}{1+k^2}},\ 0\right)。$$ 11分

如果 F_1 在直线 $y=kx+1$ 上，则

$$-k\cdot\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}+1=0,$$

即$\dfrac{2}{1+k^2}=\dfrac{1}{k^2}$，

得 $k^2=1$，即$|k|=1$，与(1)的结论$|k|\neq1$矛盾，所以 F_1 不在题设直线上，同理，F_2 也不在题设直线上，故命题结论正确。 14分