

1988 年全国普通高等学校招生统一考试

广东省数学（理工农医类）

第一卷

本卷满分 50 分，共有 25 个选择题，每题都给出代号为 A, B, C, D 的四个结论，其中只有一个结论是正确的。请把正确结论的代号选出，并在答题卷中的相应位置上按答题卷所规定的记号准确标示，每题选对得 2 分，不选、错选或者选出的代号超过一个，一律得 0 分。

1. 直线 $3x - 2y = 6$ 在 y 轴上的截距是 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. -2 C. -3 D. 3

2. 对数方程 $2 \log_6 x = 1 - \log_6 3$ 的解是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$

3. 如果用 C , R 和 I 分别表示复数集，实数集和纯虚数集，其中 C 为全集，那么有 ()

- A. $C = R \cup I$ B. $R \cap I = \{0\}$

- C. $\bar{R} = C \cap I$ D. $R \cap I = \emptyset$

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知前 15 项之和 $S_{15} = 90$ ，那么 $a_8 =$ ()

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 12

5. 如果 $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A = m$ ，那么 $\sin 2A =$ ()

- A. $\frac{1}{m}$ B. $\frac{2}{m}$ C. $2m$ D. $\frac{1}{m^2}$

6. 设 a, b 是异面直线，那么

- A. 必然存在唯一的一个平面同时平行于直线 a 和 b
B. 必然存在唯一的一个平面同时垂直于直线 a 和 b
C. 过直线 a 存在唯一的一个平面平行于直线 b
D. 过直线 a 存在唯一的一个平面垂直于直线 b

7. 当 $a \neq 0$ 时，方程 $x^2 + y^2 + ax - ay = 0$ 所表示的图形 ()

- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于直线 $y - x = 0$ 对称 D. 关于直线 $y + x = 0$ 对称

8. 设 θ 是第四象限的角，那么方程 $(\sin \theta)x^2 + y^2 = \sin 2\theta$ 所表示的曲线是 ()

- A. 焦点在 x 轴上的椭圆 B. 焦点在 y 轴上的椭圆
C. 焦点在 x 轴上的双曲线 D. 焦点在 y 轴上的双曲线

9. 抛物线 $y^2 = 4x - 2$ 的准线的方程是 ()

- A. $x = -\frac{1}{2}$ B. $x = \frac{1}{4}$ C. $x = 0$ D. $x = -1$

10. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点，作直线与此抛物线相交于两点 P 和 Q ，那么线段 PQ 中点的轨迹的方程是 ()

A. $y^2 = 2x - 1$ B. $y^2 = 2x - 2$ C. $y^2 = -2x + 1$ D. $y^2 = -2x + 2$

11. 设正方体的全面积为 24cm^2 ，一个球内切于该正方体，那么，这个球的体积是 ()

A. $\frac{4}{3}\pi\text{cm}^3$ B. $\frac{8}{3}\pi\text{cm}^3$ C. $\sqrt{6}\pi\text{cm}^3$ D. $\frac{32}{3}\pi\text{cm}^3$

12. “平面 α 内有无穷多条直线都和直线 l 平行”是“ $l \parallel \alpha$ ”的 ()

- A. 充分而不必要的条件 B. 必要而不充分的条件
C. 必要且充分的条件 D. 既不充分又不必要的条件

13. 下列函数中，在区间 $(0, 1)$ 上是增函数的只有 ()

A. $y = -\sqrt{x}$ B. $y = \frac{1}{x^3}$ C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = -x^2 + 2x + 1$

14. 下列不等式中，与不等式 $\frac{x-3}{2-x} \geq 0$ 同解的是 ()

A. $(x-3)(2-x) \geq 0$ B. $\lg(x-2) \leq 0$
C. $\frac{2-x}{x-3} \geq 0$ D. $(x-3)(2-x) > 0$

15. 用 0, 1, 2, 3, 4, 这五个数字组成没有重复数字的四位数，那么，在这些四位数中，是偶数的总共有 ()

A. 120 个 B. 96 个 C. 60 个 D. 36 个

16. 如果 $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}$ ， $\text{tg}\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ ，那么， $\text{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

A. $\frac{13}{18}$ B. $\frac{13}{22}$ C. $\frac{3}{22}$ D. $\frac{3}{18}$

17. 函数值 $\text{tg}224^\circ, \sin 136^\circ, \cos 310^\circ$ 的大小关系是 ()

A. $\text{tg}224^\circ < \sin 136^\circ < \cos 310^\circ$ B. $\sin 136^\circ < \cos 310^\circ < \text{tg}224^\circ$
C. $\cos 310^\circ < \text{tg}224^\circ < \sin 136^\circ$ D. $\cos 310^\circ < \sin 136^\circ < \text{tg}224^\circ$

18. 如果椭圆的两个焦点将长轴分成三等分，那么这个椭圆的两条准线间的距离是焦距的 ()

A. 18 倍 B. 12 倍 C. 9 倍 D. 4 倍

19. 记函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象为 l_1 ， $y = \text{arctg}x$ 的图象为 l_2 ，那么 l_1 与 l_2 的交点个数是 ()

A. 无穷多个 B. 2 个 C. 1 个 D. 0 个

20. 如果实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1$ ，那么 $(1-xy)(1+xy)$ 有 ()

A. 最小值 $\frac{1}{2}$ 和最大值 1 B. 最大值 1 和最小值 $\frac{3}{4}$
C. 最小值 $\frac{3}{4}$ 而无最大值 D. 最大值 1 而无最小值

21. 曲线 $y = 1 + \sqrt{4-x^2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) 与直线 $y = k(x-2) + 4$ 有两个交点时，实数 k 的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{5}{12}, \frac{3}{4}\right]$ B. $\left(\frac{5}{12}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$ D. $\left(0, \frac{5}{12}\right)$

22. 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的奇函数, 且当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = x(1 + \sqrt[3]{x})$, 那么 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = (\quad)$

- A. $-x(1 + \sqrt[3]{x})$ B. $x(1 + \sqrt[3]{x})$ C. $-x(1 - \sqrt[3]{x})$ D. $x(1 - \sqrt[3]{x})$

23. 已知 $y = f(x)$ 的图象如右图, 那么 $f(x) = (\quad)$

- A. $\sqrt{x^2 - 2|x| + 1}$ B. $x^2 - 2|x| + 1$

- C. $|x^2 - 1|$ D. $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$

24. $\sqrt{1 + \sin 10} = (\quad)$

- A. $\cos 5 + \sin 5$ B. $-\cos 5 - \sin 5$ C. $\sqrt{2} \cos 5$ D. $\cos 5 - \sin 5$

25. 一个三棱锥, 如果它的底面是直角三角形, 那么它的三个侧面 ()

- A. 必然都是非直角三角形 B. 至多只能有一个是直角三角形
C. 至多只能有两个是直角三角形 D. 可能都是直角三角形

第二卷

一、(本题满分 15 分) 本题共有 5 个小题, 每小题都有用横线表示的空位, 请把你认为合适的内容写在横线上的空位里. 每个小题满分 3 分.

1. 把极坐标方程 $\rho = 4 \sin \theta$ 化成直角坐标方程得_____.

2. 函数 $y = |\cos x|$ 的最小正周期是_____.

3. 复数 $(-\sqrt{6} + \sqrt{2}i)$ 的三角形式是_____.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n-1) - 2n}{(n-1) \left(\frac{1}{n} + 1 \right)}$ 的值是_____.

5. 在 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中, x^5 的系数是_____. (用具体数字作答.)

二、(本题满分 13 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PCD 是边长为 2cm 的等边三角形, 且与底面垂直, 而底面 $ABCD$ 是面积为

$2\sqrt{3}\text{cm}^2$ 的菱形, $\angle ADC$ 是锐角.

1. 求这个四棱锥的体积

2. 求证: $PA \perp CD$.

三、(本题满分 14 分)

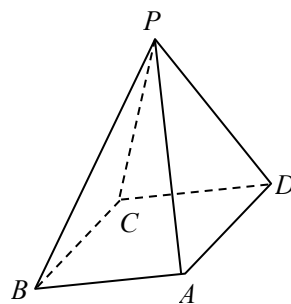
已知双曲线的方程是 $16x^2 - 9y^2 = 144$.

(1) 求这双曲线的焦点坐标、离心率和渐近线方程;

(2) 设 F_1 和 F_2 是这双曲线的左、右焦点, 点 P 在这双曲线上, 且 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 32$, 求 $\angle F_1PF_2$ 的大小.

四、(本题满分 14 分)

设 $0 < \theta < 2\pi$, 复数 $z = 1 - \cos \theta + i \sin \theta$, $u = a^2 + ai$, 且 zu 是纯虚数, 这里, i 是虚数单位, a 是实数.



1. 求复数 u 的辐角主值 $\arg u$; (用 θ 的代数式表示)

2. 记 $\omega = z^2 + u^2 + 2zu$, 试问: ω 可能是正实数吗? 为什么?

五、(本题满分 14 分)

设 $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})(x \geq 1)$.

1. 求函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 和这个反函数的定义域;

2. 记 $b_n = f^{-1}(n)$, $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 求证: 当 $\frac{1}{2} < a < 2$ 时, 对任意自然数 n , 都有 $S_n < 2^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

1988年全国普通高等学校招生统一考试

广东省数学（理工农医类）答案

第一卷答案：

1. C 2. B 3. D 4. C 5. B 6. C 7. D 8. C 9. A 10. B 11. A 12. B
13. D 14. B 15. C 16. C 17. D 18. C 19. B 20. B 21. A 22. D 23. A
24. B 25. D

第二卷答案：

一、本题考查基础知识和基本技能，只需要直接写出结果。

1. $x^2 + y^2 - 4y = 0$

2. π

3. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

4. -1

5. -162

二、本题主要考查直线、平面和多面体的基础知识，以及空间想象能力和逻辑推理能力。

1. 解：过 P 作 $PE \perp CD$ ，垂足是 E 。

$\because CD = \text{侧面 } PCD \cap \text{底面 } CA$ ，侧面 $PCD \perp$ 底面 CA ， $PE \subset$ 侧面 PCD ，

$\therefore PE \perp$ 底面 CA ，

$\because \triangle PCD$ 是等边三角形，边长 2cm ， $PE \perp CD$ 。

$$\therefore PE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}(\text{cm}),$$

依设 $S_{\text{底面}} = 2\sqrt{3}\text{cm}^2$ 。

$$\therefore \text{四棱锥的体积 } V = \frac{1}{3} PE \square S_{\text{底面}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 2(\text{cm}^3).$$

2. 证：记 $\angle ADC = \theta$ ，

\because 底面 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore S_{\text{底面}} = CD^2 \square \sin \theta,$$

依设 $CD = 2\text{cm}$ ， $S_{\text{底面}} = 2\sqrt{3}\text{cm}^2$ ，

$$\therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又 $\because \theta$ 是锐角（题设），

$$\therefore \theta = 60^\circ,$$

连 AC ，得 $\triangle ADC$ 是等边三角形，

$\because \triangle PCD$ 也是等边三角形， $PE \perp CD$ ，

$\therefore E$ 是 CD 的中点，连 AE ，

有 $AE \perp CD$,
 $AE \cap PE = E$,
 $\therefore CD \perp$ 平面 PAE
 又 $\because PA \subset$ 平面 PAE ,
 $\therefore PA \perp CD$.

三、1. 解: 化双曲线方程为标准方程式 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

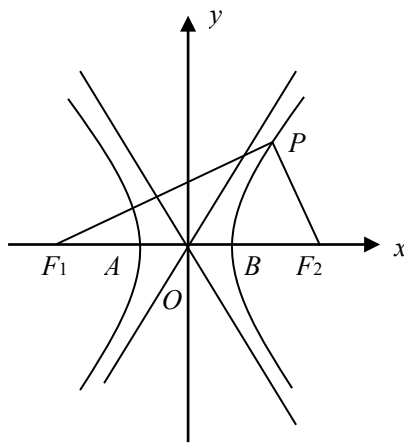
知: 实半轴长 $a = 3$, 虚半轴长 $b = 4$,
 中心在坐标原点, 实轴在 x 轴上,

\therefore 半焦距 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$,

焦点坐标为 $F_1(-5, 0)$ 和 $F_2(5, 0)$,

离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$,

渐近线方程 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 为 $y = \pm \frac{4}{3}x$.



2. 解: 设 $|PF_1| = d_1, |PF_2| = d_2$,

依设 $d_1 - d_2 = 32$,

又由双曲线的几何性质知 $|d_1 - d_2| = 2a = 6$.

$\therefore d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 = 36$,

即有 $d_1^2 + d_2^2 = 36 + 2d_1d_2 = 100$,

又 $|F_1F_2| = 2c = 10$,

$\therefore |F_1F_2|^2 = 100 = d_1^2 + d_2^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2$,

于是 $\triangle PF_1F_2$ 是以 F_1F_2 为斜边的 $\text{Rt}\triangle$,

即 $\angle F_1PF_2$ 是直角, $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$.

四、本题主要考查复数的基础知识, 以及逻辑推理能力和运算能力.

1. 解: $zu = [a^2(1 - \cos \theta) - a \sin \theta] + [a^2 \sin \theta + a(1 - \cos \theta)]i$,

由题设 zu 是纯虚数,

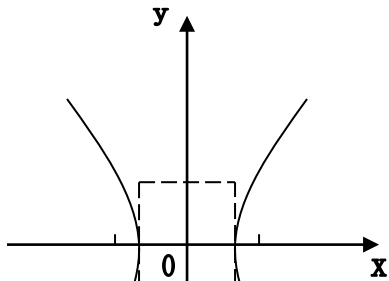
\therefore 有 $a^2 \sin \theta + a(1 - \cos \theta) \neq 0$ ①

$a^2(1 - \cos \theta) - a \sin \theta = 0$ ②

由①知 $a \neq 0$.

又 $\because 0 < \theta < 2\pi$,

$\therefore 1 - \cos \theta \neq 0$,



因此, 由②可得

$$a = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

又由②知 $\theta \neq \pi$,

$$\therefore \operatorname{tg}(\arg u) = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

$$\therefore 0 \leq \arg u < 2\pi,$$

\therefore 当 $0 < \theta < \pi$, 即 $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ 时,

复平面上与复数 $u = \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} i$ 对应的点在第一象限, 得 $\arg u = \frac{\theta}{2}$.

当 $\pi < \theta < 2\pi$, 即 $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \pi$ 时,

复平面上与复数 $u = \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} i$ 对应的点在第四象限, 得 $\arg u = \pi + \frac{\theta}{2}$.

2. 解: ω 不可能是正实数, 用反证法证明如下:

依设可得

$$\omega = (z+u)^2, \quad z+u = 1 - \cos \theta + a^2 + (a + \sin \theta)i,$$

若 ω 是正实数, 则 $z+u$ 是实数,

$$\therefore a + \sin \theta = 0, \text{ 即 } a = -\sin \theta,$$

又已知 zu 是纯虚数, 由(1)已解得

$$a = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}, \text{ 且 } \sin \theta \neq 0,$$

$$\text{因此有 } -\sin \theta = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\text{即 } -1 = \frac{1}{1 - \cos \theta}, \text{ 解得 } \cos \theta = 2,$$

这是不可能的, 因此, 证得 ω 不能是正实数.

五、本题主要考查函数及不等式的基础知识, 以及分析问题的能力.

$$1. \text{ 解: } \because f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})(x \geq 1),$$

$$\therefore \text{ 由 } y = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})(x \geq 1),$$

$$\text{得 } x + \sqrt{x^2 - 1} = a^y$$

$$\text{又 } \because x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\therefore \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = a^y$$

$$\text{得 } x - \sqrt{x^2 - 1} = a^{-y}$$

由①, ②可得 $x = \frac{a^y + a^{-y}}{2}$,

得出反函数为 $f^{-1}(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$.

它的定义域等于函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 的值域, 与 a 的取值有关:

$\because x \geq 1, \therefore x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1,$

于是, 当 $a > 1$ 时, 当且仅当 $y \in [0, +\infty)$,

方程 $\log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) = y$ 有解,

因此, 反函数的定义域为 $[0, +\infty)$,

当 $0 < a < 1$ 时, 当且仅当 $y \in (-\infty, 0]$ 时,

方程 $\log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) = y$ 有解,

因此, 反函数的定义域为 $(-\infty, 0]$.

2. 证: $\because \frac{1}{2} < a < 2, \therefore$ 有 $1 < (2a)^n$, 且 $a^n < 2^n$,

于是: $\frac{1}{2}[(2^n + 2^{-n}) - (a^n + a^{-n})]$

$$= \frac{1}{2[(2a)^n]} [2^{2n} \square a^n + a^n - a^{2n} \square 2^n - 2^n]$$

$$= \frac{1}{2[(2a)^n]} [(2a)^n - 1][2^n - a^n] > 0,$$

因此, 在题设下, 对任意自然数 n 有

$$\frac{1}{2}(a^n + a^{-n}) < \frac{1}{2}(2^n + 2^{-n}),$$

依设和 (1) 的结果, 有

$$b_n = f^{-1}(n) = \frac{1}{2}(a^n + a^{-n}),$$

$$\therefore S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

$$= \frac{1}{2}(a + a^{-1}) + \frac{1}{2}(a^2 + a^{-2}) + \cdots + \frac{1}{2}(a^n + a^{-n}) < \frac{1}{2}(2 + 2^{-1}) + \frac{1}{2}(2^2 + 2^{-2}) + \cdots + \frac{1}{2}(2^n + 2^{-n})$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 2^2 + \cdots + 2^n) + \frac{1}{2}(2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n})$$

$$= 2^n - 1 + \frac{1}{4} \left[\frac{1 - 2^{-n}}{1 - 2^{-1}} \right]$$

$$= 2^n - 1 + \frac{1}{2}[1 - 2^{-n}] = 2^n - \frac{1}{2}[1 + 2^{-n}]$$

\therefore 对任意自然数 n , $2^{-n} \neq 1$,

$$\therefore \frac{1}{2}(1 + 2^{-n}) > \sqrt{1 \square 2^{-n}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

$$2^n - \frac{1}{2}[1 + 2^{-n}] < 2^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n,$$

即证得 $S_n < 2^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ 对任意自然数 n 成立.