1989年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试题

一.

1. 若点 $P(1, a)$ 在曲线 $x^2+2xy-5y=0$ 上，则 $a=$________.

2. 计算

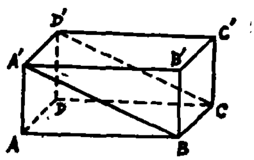
$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5 \div\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$________（i 为虚数单位）.

3. 三角方程 $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ 的解集是________.

4. 侧棱长为 3cm，底面边长为 4cm 的正四棱锥的体积为________cm^3.

5. 函数 $y=x^{-2/3}$ 的递增区间是______.

6. 已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，棱 $AA'=5$，$AB=12$，那么直线 $B'C'$ 和平面 $A'BCD'$ 的距离是________.



7. 方程 $\log_2(x-3)=\log_4(5-x)$ 的解是________.

8. 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$2\pi<\alpha<3\pi$，那么 $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=$________.

9. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{7}{n^2}+\cdots+\frac{3n-2}{n^2}\right)=$________.

10. 抛物线 $y=4x^2-4x$ 的准线方程是________.

二.

1. 若 α 是第四象限的角，则 $\pi-\alpha$ 是

(A) 第一象限的角；(B) 第二象限的角；

(C) 第三象限的角；(D) 第四象限的角.

2. 以点 $A(-5, 4)$ 为圆心，且与 x 轴相切的圆的标准方程是

(A) $(x+5)^2+(y-4)^2=16$；

(B) $(x-5)^2+(y+4)^2=16$；

(C) $(x+5)^2+(y-4)^2=25$；

(D) $(x-5)^2+(y+4)^2=25$.

3. 若 $a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是

(A) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；　(B) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$；

(C) $|a|>|b|$；(D) $a^2>b^2$.

4. 两排座位，第一排有 3 个座位，第二排有 5 个座位，若 8 名学生入座（每人一个座位），则不同坐法的种数是

(A) $C_8^5C_8^3$；　(B) $P_2^1C_8^5C_8^3$；

(C) $P_8^5P_8^3$；　(D) P_8^8.

5. 设 z_1、z_2 为复数，那么 $z_1^2+z_2^2=0$ 是 z_1、z_2 同时为零的

(A) 充分不必要条件；

(B) 必要不充分条件；

(C) 充分必要条件；

(D) 既不充分又不必要条件.

6. 下面四个函数中为奇函数的是

(A) $y=x^2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$；

(B) $y=x^2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$；

(C) $y=\cos(\mathrm{arc\,ctg}x)$；

(D) $y=\mathrm{arc\,ctg}(\sin x)$.

7. 下列四个命题中的真命题是

(A) 若直线 l 与平面 α 内两条平行直线

垂直，则 $l\perp\alpha$；

(B) 若平面 α 内两条直线与平面 β 内两条直线分别平行，则 $\alpha\parallel\beta$；

(C) 若平面 α 与直二面角 β-MN-γ 的棱 MN 交于点 A，与二面角的面 β、面 γ 分别交于 AB、AC，则 $\angle BAC\leqslant 90°$；

(D) 以上三个命题都是假命题.

8. 要得到函数 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象

(A) 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位；

(B) 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位；

(C) 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位；

(D) 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位.

9. 设直角 $\triangle ABC$ 的直角边 $BC=a$，$AC=b$，斜边 $AB=c$，且 $a<b$，现分别以直线 BC、AC 和 AB 为轴将直角三角形绕轴旋转一周，所得的三个旋转体的体积分别记为 V_1、V_2 和 V_3，那么 V_1、V_2 和 V_3 间的大小关系是

(A) $V_3>V_1>V_2$；　(B) $V_1>V_2>V_3$；

(C) $V_1>V_3>V_2$；　(D) $V_2>V_1>V_3$.

10. 下列参数方程（t 是参数）中与方程 $y^2=x$ 表示同一曲线的是

(A) $\begin{cases}x=t,\\y=t^2;\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x=\sin^2 t,\\y=\sin t;\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x=t,\\y=\sqrt{|t|};\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x=\dfrac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t},\\y=\operatorname{tg} t.\end{cases}$

三.

1. 求 $\cos\left(2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{6}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

2. 求函数 $y=\sqrt{2+\log_{1/2}x}+\sqrt{\operatorname{tg}x}$ 的定义域.

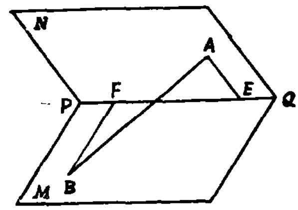
3. 在直角坐标系 xOy 中，过点 $P(-3,4)$ 的直线 l 与直线 OP 的夹角为 45°，求直线 l 的方程

4. 在 $(1-x^2)^{20}$ 的展开式中，如果第 $4r$ 项和第 $r+2$ 项的二项式系数相等，

(1) 求 r 的值；

(2) 写出展开式中的第 $4r$ 项和第 $r+2$ 项.

四. 如图，设点 A、B 分别在二面角 M-PQ-N（平面角为锐角）的两个面 N、M 上，直线 AB 与面 M、N 所成的角分别为 α、β，过点 A、B 分别作棱 PQ 的垂线 AE、BF，垂足为 E、F.



求证：$\dfrac{AE}{BF}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

五. 设复数集合 $M=\left\{z\,\middle|\,|z-2+i|\leqslant 2,\ z\in C\right\}\cap\left\{z\,\middle|\,|z-2-i|=|z-4+i|,\ z\in C\right\}$.

1. 试在复平面内作出表示集合 M 的图形，并说出图形的名称；

2. 求集合 M 中元素 z 的辐角主值的范围；

3. 求集合 M 中元素 z 的模的范围.

六. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1>0$，公比 $q>-1$ 且 $q\neq 0$. 设数列 $\{b_n\}$ 的通项 $b_n=a_{n+1}+a_{n+2}(n\in N)$，数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项的和分别记为 A_n、B_n. 试比较 A_n 与 B_n 的大小.

七. F 是定点，l 是定直线，点 F 到直线 l 的距离为 $p(p>0)$，点 M 在直线 l 上滑动，动点 N 在 MF 的延长线上，且满足条件 $\dfrac{|FN|}{|MN|}=\dfrac{1}{|MF|}$.

1. 求动点 N 的轨迹；

2. 求 $|MN|$ 的最小值.

1989年全国普通高等学校招生统一考试

上海数学试题解答

一、1. $\frac{1}{3}$.　　2. $-\sqrt{2}i$.

3. $\left\{x \mid x=4k\pi+\frac{2\pi}{3}\text{或}x=4k\pi-2\pi, k\in Z\right\}$.

4. $\frac{16}{3}$.　　5. $(-\infty, 0)$.

6. $\frac{60}{13}$.　　7. $x=4$.

8. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.　9. $\frac{3}{2}$.　10. $y=-\frac{17}{16}$.

二、

题　号	1	2	3	4	5
代　号	C	A	B	D	B
题　号	6	7	8	9	10
代　号	C	D	A	B	D

三、[解]1. 设 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{6}$，则 $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{6}$.

$$\cos 2\theta=\frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=-\frac{5}{7},$$

$$\sin 2\theta=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{2\sqrt{6}}{7},$$

$$\therefore \cos\left(2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\cos 2\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2\theta\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=-\frac{5+6\sqrt{2}}{14}.$$

2. 解不等式组 $\begin{cases}2+\log_{1/2}x\geqslant 0, & ①\\ \operatorname{tg}x\geqslant 0, & ②\end{cases}$

由①，得 $0<x\leqslant 4$，

由②，得 $k\pi\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$.

所以函数 y 的定义域为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup[\pi, 4]$.

3. 设直线 l 的斜率为 k. 直线 OP 的斜率 $k_{OP}=-\frac{4}{3}$. 按题意，有

$$\left|\frac{k+4/3}{1-4k/3}\right|=1,$$

即 $3k+4=\pm(3-4k)$，

解得　$k_1=-\frac{1}{7}$，　$k_2=7$.

故所求直线方程是 $x+7y-25=0$ 和 $7x-y+25=0$.

4. (1)展开式中第 $4r$ 项的二项式系数为 C_{20}^{4r-1}，第 $r+2$ 项的二项式系数为 C_{20}^{r+1}.

根据二项式系数的性质，当且仅当 $4r-1=r+1$ 或 $(4r-1)+(r+1)=20$ 时，它们的二项式系数相等.

解得 $r=\frac{2}{3}$(不合题意，舍去)，或 $r=4$.

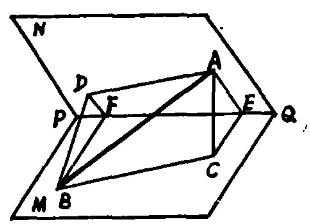
(2) 当 $r=4$ 时，第 $4r$ 项是

$$T_{16}=C_{20}^{15}(-x^2)^{15}=-15504x^{30},$$

第 $r+2$ 项是

$$T_6=C_{20}^{5}(-x^2)^{5}=-15504x^{10}.$$

四、[证]过 A、B 分别作 AC、BD 垂直于平面 M、N，垂足分别为 C、D，连 CE、DF、BC 和 DA，则



$$\angle ABC=\alpha,\quad \angle BAD=\beta,$$

在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle ABD$ 中，分别有：

$$AC=AB\cdot\sin\alpha,\ BD=AB\cdot\sin\beta,\qquad ①$$

$\because AE\perp PQ$，$\therefore CE\perp PQ$(三垂线定理逆定理)，

故 $\angle AEC$ 为二面角 $M\text{-}PQ\text{-}N$ 的平面角，

同理 $\angle BFD$ 也为二面角 $M\text{-}PQ\text{-}N$ 的平面角，

于是 $\angle AEC=\angle BFD$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEC\backsim\mathrm{Rt}\triangle BFD$，

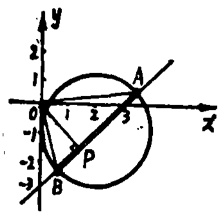
得 $$\frac{AE}{BF}=\frac{AC}{BD}, \qquad ②$$

将①式代入②式，即有

$$\frac{AE}{BF}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

五．［解］1. 设 $z=x+yi$，由题意得

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2\leqslant 4,\\ x-y=3.\end{cases}$$



则集合M的图形是图中直线段 AB.

2. 解方程组 $\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2=4,\\ x-y=3,\end{cases}$

得 $A(2+\sqrt{2},\ \sqrt{2}-1)$，

$B(2-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}-1)$.

记点 A、B 所对应的复数的辐角主值分别为 θ_1、θ_2，则

$$\theta_1=\operatorname{arc\,tg}\frac{3\sqrt{2}-4}{2},$$

$$\theta_2=2\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{3\sqrt{2}+4}{2}.$$

所以集合M中元素 z 的辐角主值的范围是

$$\left[2\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{3\sqrt{2}+4}{2},\ 2\pi\right)$$

$$\cup\left[0,\ \operatorname{arc\,tg}\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right].$$

3. $$|OA|=\sqrt{9+2\sqrt{2}},$$

$$|OB|=\sqrt{9-2\sqrt{2}}.$$

作 $OP\perp AB$，垂足为P. 由 $\begin{cases}x-y=3\\ x+y=0\end{cases}$ 解得

$$P\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right),\ |OP|=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

因为点P在圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 内，又 $|OA|>|OB|$，所以集合M中元素 z 的模的范围是 $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{9+2\sqrt{2}}\right]$.

六、［解一］$\because b_n=a_{n+1}+a_{n+2}=a_n(q^2+q)$，

$\therefore \quad B_n=(q^2+q)A_n$.

当 $q>0$ 时，

$\because \ a_1>0, a_n=a_1q^{n-1}>0,\ \ \therefore A_n>0$；

当 $-1<q<0$ 时，

$\because a_1>0,\ 1-q>0,\ 1-q^n>0$，

$$\therefore \quad A_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}>0.$$

故当 $q>-1$ 且 $q\neq 0$ 时总有 $A_n>0$.

由 $B_n-A_n=A_n(q^2+q-1)$

$$=A_n\left(q+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(q-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),$$

得 i) 当 $-1<q<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 且 $q\neq 0$ 时，$A_n>B_n$；

ii) 当 $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$A_n=B_n$；

iii) 当 $q>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$A_n<B_n$.

［解二］$\because b_n=a_{n+1}+a_{n+2}=a_1(1+q)q^n$，

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=q,\quad q\neq 0,\quad n\in N,$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 也是等比数列.

① 当 $q=1$ 时，

$$A_n=na_1,\ B_n=2na_1,$$

$\because \ n\in N,\ a_1>0,\ \ \therefore A_n<B_n$.

② 当 $q>-1$ 且 $q\neq 1$ 时，

$$B_n-A_n=\frac{a_1(1+q)q(1-q^n)}{1-q}-\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$=\frac{a_1(1-q^n)(q^2+q-1)}{1-q}$$

$$=\frac{a_1(1-q^n)\left(q+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(q-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{1-q}.$$

$\because$ 在 $-1<q<1$ 时，$1-q^n>0,\ 1-q>0$；

在 $q>1$ 时，$1-q^n<0,\ 1-q<0$.

又 $a_1>0$,

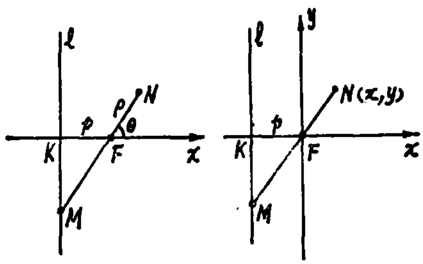
$\therefore \quad \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}>0.$

于是,i) 当 $-1<q<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 且 $q\neq0$ 时,$A_n>B_n$;

ii) 当 $q=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时, $A_n=B_n$;

iii) 当 $q>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时, $A_n<B_n$.

七. [解一] 1. 作 $FK\perp l$, 垂足为 K, 以 F 为极点,FK 的反向延长线为极轴,建立极坐标系. 设动点 N 的极坐标为 (ρ,θ). 根据题意,不妨取



$$\rho>0,\quad \cos\theta>0.$$

$\because \quad |MF|=\dfrac{p}{\cos\theta},\quad |FN|=\rho,$

$\therefore \quad |MN|=|MF|+|FN|=\dfrac{p}{\cos\theta}+\rho.$

由点 N 所满足的条件,得

$$\frac{p}{\cos\theta}\cdot\rho=\frac{p}{\cos\theta}+\rho,$$

故所求轨迹的极坐标方程为

$$\rho=\frac{1}{1-\frac{1}{p}\cos\theta}\quad(0<\cos\theta<p).$$

设过极点 F 且与极轴垂直的直线为 l',则

当 $e=\dfrac{1}{p}>1$,即 $0<p<1$ 时,所求轨迹是双曲线在直线 l' 右边的部分;

当 $e=\dfrac{1}{p}=1$, 即 $p=1$ 时,所求轨迹是抛物线在直线 l' 右边的部分;

当 $0<e=\dfrac{1}{p}<1$,即 $p>1$ 时,所求轨迹是椭圆在直线 l' 右边的部分.

2. $\quad |MN|=\dfrac{p}{\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\frac{1}{p}\cos\theta}$

$$=\frac{p^2}{\cos\theta(p-\cos\theta)}=\frac{p^2}{-\left(\cos\theta-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}}.$$

若 $0<p\leqslant2$, 则当 $\cos\theta=\dfrac{p}{2}$ 时, $|MN|$ 取得最小值 4;

若 $p>2$, 则当 $\cos\theta=1$ 时, $|MN|$ 取得最小值 $\dfrac{p^2}{p-1}$.

[解二] 1. 过 F 作 l 的垂线, 垂足为 K, 以 F 为原点,直线 KF 为 x 轴, 建立直角坐标系. 设点 N 的坐标为 (x,y),根据题意,$x>0$.直线 l 的方程为 $x=-p$. 设直线 MN 的斜率为 k, 则点 M 和 N 的坐标分别为 $(-p,-pk)$ 和 (x,kx), $|MF|=p\sqrt{1+k^2}$,

$$|FN|=\sqrt{x^2+y^2}=x\sqrt{1+k^2},$$

$$|MN|=|MF|+|FN|=(x+p)\sqrt{1+k^2}.$$

按题意有 $\quad (p\sqrt{1+k^2})\cdot(x\sqrt{1+k^2})$

$$=(x+p)\sqrt{1+k^2}.$$

$\because \quad k=\dfrac{y}{x},\qquad \therefore \quad p\sqrt{x^2+y^2}=x+p,\qquad ①$

$$p^2(x^2+y^2)=(x+p)^2\ (x>0).$$

$$(p^2-1)x^2+p^2y^2-2px-p^2=0(x>0).$$

当 $0<p<1$, 所求轨迹是双曲线在 y 轴右边的部分; 当 $p=1$,所求轨迹是抛物线在 y 轴右边的部分; 当 $p>1$,所求轨迹是椭圆在 y 轴右边的部分.

2. 将 $y=kx$ 代入①,得

$$x=\frac{p}{p\sqrt{1+k^2}-1}\left(\text{由}x>0,\ \text{得}\ k^2>\frac{1-p^2}{p^2}\right),$$

$$|MN|=(x+p)\sqrt{1+k^2}=\frac{p^2(1+k^2)}{p\sqrt{1+k^2}-1},$$

令 $k=\operatorname{tg}\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

由 $\operatorname{tg}^2\theta>\dfrac{1-p^2}{p^2}$,得 $0<\cos\theta<p$,

则 $\qquad |MN|=\dfrac{p^2}{\cos\theta(p-\cos\theta)}.$

(以下同解一).