1989年全国普通高等学校招生统一考试

广东省数学试题（理工农医类）

考生注意：本科试题分两卷，第一卷分A型和B型两种，考生按指定解答其中的一种，第二卷要求考生全部作答．两卷同时分发，要求考生在二小时三十分钟内完成全部解答．全卷满分120分．

第一卷

本卷满分50分，共有25道选择题，每题都给出代号为A，B，C，D的四个结论，其中只有一个结论是正确的．请把正确结论的代号选出，并在答题卷中的相应位置上按答题卷所规定的记号准确标示．每题选对得2分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律得0分．

1．直线 $x+\sqrt{3}y-3=0$ 的倾斜角是（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{5}{6}\pi$　　D．$\frac{2}{3}\pi$

2．二面角是指（　　）

A．两个平面所组成的角

B．经过同一直线的两个平面所组成的图形

C．从一条直线出发的两个半平面所组成的图形

D．两个平面所夹的不大于 90° 的角

3．函数 $f\left(x\right)=x^{\frac{3}{5}}$（　　）

A．是奇函数而不是偶函数　　B．是偶函数而不是奇函数

C．既是奇函数又是偶函数　　D．既不是奇函数又不是偶函数

4．如果 $\sin\left(\pi+A\right)=-\frac{1}{2}$，那么 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-A\right)=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5．函数 $y=4^{-x}$ 的反函数是（　　）

A．$y=\log_4\left(-x\right)$　　B．$y=-\log_4 x$　　C．$y=\log_4 x$　　D．$y=4^x$

6．设 A 是直角坐标平面上所有的点所组成的集合，如果由 A 到 A 的一一对应映射 f，使象集合的元素 $\left(y-1,\ x+2\right)$ 和原象集合的元素 $\left(x,\ y\right)$ 对应，那么，象点 $\left(3,-4\right)$ 的原象是点（　　）

A．$\left(-5,5\right)$　　B．$\left(4,-6\right)$　　C．$\left(2,-2\right)$　　D．$\left(-6,4\right)$

7．在等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，如果 $a_6=6$，$a_9=9$ 那么 $a_3=$（　　）

A．4　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{16}{9}$　　D．3

8．如果抛物线的顶点在原点，对称轴对 x 轴，焦点在直线 $3x-4y-12=0$ 上，那么抛物线的方程是（　　）

A． $y^2=-16x$　　B． $y^2=12x$　　C． $y^2=16x$　　D． $y^2=-12x$

9．如果椭圆的两条准线间的距离是这个椭圆的焦距的两倍，那么这个椭圆的离心率为（　　）

A． $\dfrac{1}{4}$　　B． $\dfrac{1}{2}$　　C． $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D． $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

10．如果双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-y^2=1$ 的两个焦点为 F_1， F_2， A 是该双曲线上一点，且 $\left|AF_1\right|=5$，那么， $\left|AF_2\right|=$（　　）

A． $5+\sqrt{10}$　　B． $5+2\sqrt{10}$　　C． 8　　D． 11

11．如果 l 和 n 是异面直线，那么和 l， n 都垂直的直线（　　）

A．不一定存在　　B．总共只有一条

C．总共可能有一条，也可能有两条　　D．必然有无穷多条

12．“两底面直径之差等于母线长”的圆台（　　）

A．是不存在的　　B．其母线与下底面必成 60° 角

C．其母线与下底面所成的角不是定值　　D．其高与母线必成 60° 角

13．侧面都是直角三角形的正三棱锥，底面边长为 a 时，该三棱锥的全面积是（　　）

A． $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}a^2$　　B． $\dfrac{3}{4}a^2$　　C． $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}a^2$　　D． $\dfrac{6+\sqrt{3}}{4}a^2$

14．设 $\{a_n\}$ 是公差为 (-2) 的等差数列，如果 $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}=50$，那么 $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=$（　　）

A． -182　　B． -78　　C． -148　　D． -82

15．如果直线 l_1， l_2 的斜率分别是二次方程 $x^2-4x+1=0$ 的两根，那么 l_1， l_2 所成的角是（　　）

A． $\dfrac{\pi}{3}$　　B． $\dfrac{\pi}{4}$　　C． $\dfrac{\pi}{6}$　　D． $\dfrac{\pi}{8}$

16．在极坐标系中，如果等边三角形 ABC 的两个顶点是 $A\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$， $B\left(2,\dfrac{5}{4}\pi\right)$，那么顶点 C 的坐标可能是（　　）

A． $\left(4,\dfrac{3}{4}\pi\right)$　　B． $\left(2\sqrt{3},\dfrac{3}{4}\pi\right)$　　C． $\left(2\sqrt{3},\ \pi\right)$　　D． $(3,\ \pi)$

17．不等式 $\sqrt{4-x^2}+\dfrac{|x|}{x}\geqslant 0$ 的解集是（　　）

A． $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$　　B． $\left\{x\middle|-\sqrt{3}\leqslant x<0\text{或}0<x\leqslant 2\right\}$

C． $\{x|-2\leqslant x<0\text{或}0<x\leqslant 2\}$　　D． $\left\{x\middle|-\sqrt{3}\leqslant x<0\text{或}0<x\leqslant \sqrt{3}\right\}$

18．如果函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数，那么实数 a 的取值范围是（　　）

A． $a\geqslant -3$　　B． $a\leqslant -3$　　C． $a\leqslant 5$　　D． $a\geqslant 3$

19．如果 $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{m}{n}$，那么，$m\cos A-n\sin A=$（　　）

A．n　　B．$-n$　　C．$-m$　　D．m

20．如果 $0<m<b<a$，那么（　　）

A．$\cos\dfrac{b+m}{a+m}<\cos\dfrac{b}{a}<\cos\dfrac{b-m}{a-m}$　　B．$\cos\dfrac{b}{a}<\cos\dfrac{b-m}{a-m}<\cos\dfrac{b+m}{a+m}$

C．$\cos\dfrac{b-m}{a-m}<\cos\dfrac{b}{a}<\cos\dfrac{b+m}{a+m}$　　D．$\cos\dfrac{b+m}{a+m}<\cos\dfrac{b-m}{a-m}<\cos\dfrac{b}{a}$

21．如果 θ 是第三象限的角，且满足 $\sqrt{1+\sin\theta}=\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}$，那么 $\dfrac{\theta}{2}$ 是（　　）

A．第四象限的角　　B．第三象限的角

C．第二象限的角　　D．第一象限的角

22．如果 x，y 是实数，那么“$x\neq y$”是“$\cos x\neq\cos y$”的（　　）

A．充分而且必要的条件　　B．充分但不必要的条件

C．必要但不充分的条件　　D．既不充分也不必要的条件

23．方程 $\arcsin x+\arccos y=\dfrac{\pi}{2}$ 所表示的曲线是（　　）

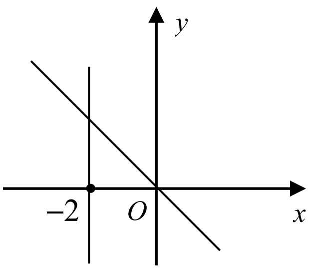
A．一个半圆弧　　B．一个圆周　　C．一条直线　　D．一条线段

24．如果 $0<a<1$，$0<x\leqslant y<1$，且 $\log_a x\cdot\log_a y=1$，那么，xy（　　）

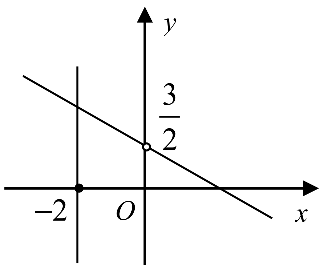
A．无最大值也无最小值　　B．无最大值而有最小值

C．有最大值而无最小值　　D．有最大值也有最小值

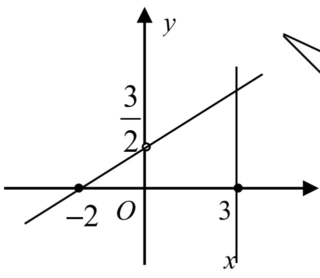
25．设 k 是正实数，如果方程 $kxy+x^2-x+4y-6=0$ 表示两条直线，那么，它们的图形是（　　）



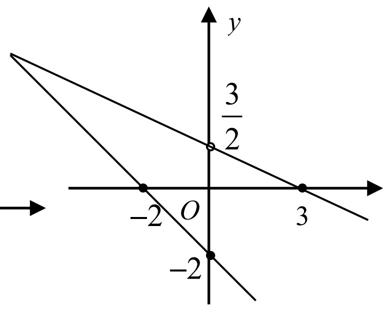
A.



B.



C.



D.

第二卷

考生注意：本卷共五大题，考生必须全部作答，满分 70 分．

一、本题满分 15 分．本题共有 5 小题，每小题都有用横线表示的空位，请把你认为合适的内容写在横线上方的空位里，每道小题满分 3 分．

1．函数 $y=\sqrt{x^2-49}$ 的值域是__________.

2．$\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$ 的值是__________.

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$ 的值是__________.

4．由 1，2，3，4 四个数字组成的没有重复数字的四位数中，比 1234 大的数共有______个（用具体数字作答）.

5．如果虚数 z 满足 $z^3=8$，那么 z^3+z^2+2z+2 的值是__________.

二、本题满分 13 分

如图，在平面 β 内有 $\triangle ABC$，在平面 β 外有点 S，斜线 $SA\perp AC$，$SB\perp BC$．且斜线 SA，SB 分别与平面 β 所成的角相等.

（1）求证：$AC=BC$；

（2）又设点 S 与平面 β 的距离为 4 厘米，$AC\perp BC$，且 $AB=6$ 厘米，求点 S 与直线 AB 的距离.

三、本题满分 14 分

设 i 是虚数单位，复数 z 和 ω 满足 $z\omega+2iz-2i\omega+1=0$.

（1）如果 z 和 ω 又满足 $\overline{\omega}-z=2i$，求 z 和 ω 的值；

（2）求证：如果 $|z|=\sqrt{3}$，那么 $|\omega-4i|$ 的值是一个常数；并求出这个常数.

四、本题满分 14 分

已知实数 $a>0$，函数 $f(x)=x^2\log_4 a$

1．如果方程 $f(x-1)+2x=0$ 无实根，求 a 的取值范围；

2．如果 $a=4$ 时，在抛物线 $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$ 上有两点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 满足 $|AB|=y_1+y_2+2$，求证：点 A，B 和这抛物线的焦点三点共线.

五、本题满分 14 分

设圆 C 的方程为 $x^2+y^2-2x\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)-2y\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}+\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2=0$，式中 θ 是实数，且 $0<\theta<\pi$.

1．当 θ 在区间 $(0, \pi)$ 内变动时，求圆 C 的圆心轨迹的方程（写成普通形式），并画出轨迹曲线的草图；

2．又设 θ_1，θ_2，θ_3 都是区间 $(0, \pi)$ 内的实数，且 θ_1，θ_2，θ_3 成为公差不为零的等差数列，当 θ 依次取值 θ_1，θ_2 或 θ_3 时，所对应的圆 C 的半径依次为 r_1，r_2 和 r_3，试问：r_1，r_2，r_3 是否成等比数列？为什么？

1989年广东数学试题解答及评分标准（理工农医类）

第一卷

本卷考查基础知识和基本技能

每一道小题，选对给2分，不选、选错或者选出的代号超过一个的，一律给0分．25道小题的给分之和就是本卷全卷的给分．

B型卷答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
答案	C	C	A	A	B	D	A	C	C	D	D	B	A

题号	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
答案	D	A	B	B	B	C	A	C	C	D	C	B

第二卷

一、本题考查基础知识和基本运算，只需直接写出结果．

每一道小题，结果正确的，给3分，5道小题的给分之和就是本题全题的给分．

1．$\left[0,+\infty\right)$　　2．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　3．$\dfrac{3}{2}$　　4．23　　5．6

二、本题主要考查点、直线和平面的位置关系、解三角形等知识，以及空间想象能力．证出第（1）小题给6分，解出第（2）小题给7分．

（1）证：过S作$SD\perp\beta$，D是垂足，连AD，BD，

则$SD\perp AD$，$SD\perp BD$，且$\angle SAD$和$\angle SBD$分别

是SA，SB和平面β所成的角，依设，$\angle SAD=\angle SBD$

又SD是$\mathrm{Rt}\triangle SAD$和$\mathrm{Rt}\triangle SBD$的公共边，

$\therefore\triangle SAD\cong\triangle SBD$，$\therefore SA=SB$；…………3分

依设，$SA\perp AC$，$SB\perp BC$；连SC，在$\mathrm{Rt}\triangle SAC$和$\mathrm{Rt}\triangle SBC$中，$SC=SC$，$SA=SB$，故$\triangle SAC\cong\triangle SBC$，

$\therefore AC=BC$．…………6分

（2）与（1）的证法相配合

由（1）的证明知$SA=SB$，即$\triangle SAB$是等腰三角形，取AB的中点E，连SE，则$SE\perp AB$；所以，SE的长为点S与直线AB的距离．…………7分

$\because SD\perp\beta$，$D\in\beta$，$SA\perp AC$，$AC\subset\beta$，

$\therefore AC\perp AD$（三垂线定理的逆定理）；

同理，$BC\perp BD$；又$AC\perp BC$（题设），$AC=BC$（已证），

$\therefore$四边形$ACBD$是正方形；…………10分

连DE，因为E是对角线AB的中点，所以有$DE=\dfrac{1}{2}AB$（正方形性质）；

$\because SD\perp\beta$，$DE\subset\beta$，

$\therefore SD\perp DE$，且SD的长度是点S与平面β的距离，依设$SD=4$；

又$AB=6$，$\therefore DE=3$，$SE=\sqrt{SD^2+DE^2}=\sqrt{16+9}=5$（厘米）；

即点 S 与直线 AB 的距离为 5 厘米． ……………………………………………………13 分

三、本题主要考查复数基础知识和运算能力．解出第（1）小题给 7 分，证出第（2）小题给 7 分．

1．解：$\because \overline{\omega}-z=2i$，$\therefore z=\overline{\omega}-2i$，又 $z\omega+2iz-2i\omega+1=0$，

$\therefore \left(\overline{\omega}-2i\right)\left(\omega+2i\right)-2i\omega+1=0$；

设 $\omega=x+yi$，其中，x 和 y 是实数；则 $\left[x^2+\left(y+2\right)^2+2y+1\right]-2xi=0$，

即 $\left(x^2+y^2+6y+5\right)-2xi=0$， ……………………………………………………………… 3 分

$$\therefore \begin{cases} x=0, \\ y^2+6y+5=0; \end{cases}$$

解得：$x=0$，$y=-1$；或 $x=0$，$y=-5$；

$\therefore \omega=-i$ 或 $-5i$；$\because z=\overline{\omega}-2i$，$\therefore z=-i$ 或 $3i$；

因此，所求的值为 $z=-i$，$\omega=-i$ 或 $z=3i$；$\omega=-5i$ ………………………………… 7 分

2．证：$\because z\omega+2iz-2i\omega+1=0$，$\therefore z\left(\omega+2i\right)=2i\omega-1$，$|z|^2\cdot|\omega+2i|^2=|2i\omega-1|^2$，

$\because |z|=\sqrt{3}$，$|\omega+2i|^2=\left(\omega+2i\right)\left(\overline{\omega+2i}\right)=\left(\omega+2i\right)\left(\overline{\omega}-2i\right)$

$=\omega\overline{\omega}+2i\overline{\omega}-2i\omega+4$，$|2i\omega-1|^2=\left(2i\omega-1\right)\left(-2i\overline{\omega}-1\right)=4\omega\overline{\omega}+2i\overline{\omega}-2i\omega+1$，

将此三式代入前式，整理得 $\omega\overline{\omega}-4i\overline{\omega}+4i\omega=11$， …………………………………………12 分

$\therefore |\omega-4i|^2=\left(\omega-4i\right)\left(\overline{\omega}+4i\right)=\omega\overline{\omega}-4i\overline{\omega}+4i\omega+16=11+16=27$，

$\therefore |\omega-4i|=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$，

这便证明了 $|\omega-4i|$ 的值是常数 $3\sqrt{3}$． ……………………………………………………14 分

四、本题主要考查二次函数、对数函数和抛物线等基础知识，以及逻辑推理能力，解出第（1）小题给 7 分，证出第（2）小题给 7 分．

1．解：$\because f\left(x\right)=x^2\log_4 a$，

$\therefore f\left(x-1\right)=\left(x-1\right)^2\log_4 a=\left(x^2-2x+1\right)\log_4 a$，

原方程即为 $x^2\log_4 a+2\left(1-\log_4 a\right)x+\log_4 a=0$，

使方程无实根，必须且只须判别式 $4\left(1-\log_4 a\right)^2-4\log_4^2 a<0$，

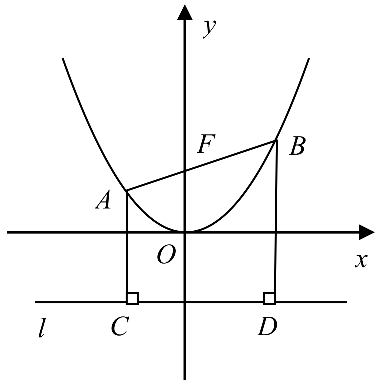
即 $1-2\log_4 a<0$，$\log_4 a>\dfrac{1}{2}$． ……………………………………………………………… 4 分

对数的底 $4>1$，由对数函数的单调性质，得 $a>4^{\frac{1}{2}}=2$；

将 $a>2$ 代入检验，是原不等式的解，因此，$a>2$ 为所求的 a 的取值范围． ………… 7 分

2．证：$\because a=4$，

$\therefore f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\log_4 4=\dfrac{x^2}{4}$，抛物线 $y=f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 即为



$x^2=4y$，这抛物线的焦点为 $F(0,1)$； ………… 9 分

准线 l 的方程为 $y=-1$．点 $A(x_1,\ y_1)$ 和 $B(x_2,\ y_2)$ 在抛物线上，故 $y_1=\dfrac{1}{4}x_1^2\geqslant 0$，$y_2=\dfrac{1}{4}x_2^2\geqslant 0$；且 $A,\ B$ 分别与准线 l 的距离为 $d_1=y_1+1$ 和 $d_2=y_2+1$；

根据抛物线的几何性质，$|AF|=d_1$；$|BF|=d_2$，

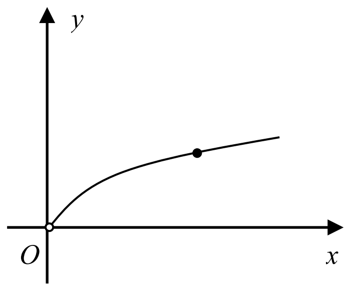
$\therefore |AF|+|BF|=y_1+y_2+2$；依设，$|AB|=y_1+y_1+2$，$\therefore |AF|+|BF|=|AB|$； ……12 分

如果 $A,\ B,\ F$ 三点不共线，那么，考虑 $\triangle ABF$，根据三角形的性质，有 $|AF|+|BF|>|AB|$，与上式矛盾，所以，$A,\ B$ 和 F 三点必共线． ……………………………………………………………14 分

五、本题考查圆、三角函数、数列和轨迹等基础知识，以及综合运用数学知识和方法解决问题的能力．解出第（1）小题给 6 分，解出第（2）小题给 8 分．

（1）解：化圆 C 的方程为 $\left(x-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2+\left(y-\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right)^2=\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}$，

得圆 C 的圆心坐标为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}, \\ y=\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2};0<\theta<\pi; \end{cases}$ ………… 2 分



$\because \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}$，

$\therefore$ 所求的圆心的轨迹的普通方程为 $y^2=x\,(y>0)$；………………………………………… 4 分

也可写成 $y=\sqrt{x}\,(x>0)$．

这方程表明圆心轨迹曲线是位于第一象限中的半支抛物线，草图如上．（不含坐标原点）
……………………………………………………………………………………………… 6 分

（2）解：由圆 C 的方程（见（1）的解）可知圆 C 的半径的为 $r=\left|\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right|$，

$\because 0<\theta<\pi$，$\therefore r=\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$，依设有 $r_1=\operatorname{tg}\dfrac{\theta_1}{2}$，$r_2=\operatorname{tg}\dfrac{\theta_2}{2}$，$r_3=\operatorname{tg}\dfrac{\theta_3}{2}$，式中，$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$ 都是区间 $(0,\ \pi)$ 内的实数，且 θ_1，θ_2，θ_3 是公差不为零的等差数列，即有 $\theta_3-\theta_2=\theta_2-\theta_1\neq 0$；

$\therefore \dfrac{\theta_1}{2}+\dfrac{\theta_3}{2}=\theta_2$；…………………………………………………………………………8 分

（ⅰ）当 $\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $r_2=\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$，且 $\dfrac{\theta_1}{2}+\dfrac{\theta_3}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{\theta_1}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{\theta_2}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore \mathrm{tg}\dfrac{\theta_1}{2}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\theta_3}{2}=1$，即有 $r_1r_3=1=r_2^2$，且 r_1，r_2，r_3 都不为零，这时，r_1，r_2，r_3 成等比数列；10 分

（ⅱ）当 $0<\theta_2<\dfrac{\pi}{2}$，或 $\dfrac{\pi}{2}<\theta_2<\pi$ 时，由 $\dfrac{\theta_1}{2}+\dfrac{\theta_3}{2}=\theta_2\neq\dfrac{\pi}{2}$，

可得 $\dfrac{\mathrm{tg}\frac{\theta_1}{2}+\mathrm{tg}\frac{\theta_3}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\theta_1}{2}\mathrm{tg}\frac{\theta_3}{2}}=\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\theta_2}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta_2}{2}}$，

从而，$\dfrac{r_1+r_3}{1-r_1r_3}=\dfrac{2r_2}{1-r_2^2}$；

如果 r_1，r_2，r_3 成等比数列，则有 $r_1r_3=r_2^2$，故 $1-r_1r_3=1-r_2^2$；因此由前式得 $r_1+r_3=2r_2$；

$\therefore r_1^2+2r_1r_3+r_3^2=4r_2^2$，$\because r_1r_3=r_2^2$，$\therefore r_1^2-2r_1r_3+r_3^2=0$，$\left(r_1-r_3\right)^2=0$，

由此得出 $r_1=r_3$，又因为 $r_1+r_3=2r_2$，所以有 $r_1=r_2=r_3$，

即 $\mathrm{tg}\dfrac{\theta_1}{2}=\mathrm{tg}\dfrac{\theta_2}{2}=\mathrm{tg}\dfrac{\theta_3}{2}$，

由于 $\dfrac{\theta_1}{2}$，$\dfrac{\theta_2}{2}$，$\dfrac{\theta_3}{2}$ 都是区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的实数，此式成立，必有 $\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{\theta_2}{2}=\dfrac{\theta_3}{2}$，$\therefore \theta_1=\theta_2=\theta_3$，

即 θ_1，θ_2，θ_3 是公差为零的等差数列，与题设矛盾．这就证明了：这时，r_1，r_2，r_3 不能成为等比数列．

综上所述，得如下结论：

当 $\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$ 时，r_1，r_2，r_3 必定成为等比数列；当 $\theta_2\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时，r_1，r_2，r_3 不可能成为等比数列．14 分