

# 1990年全国普通高等学校招生统一考试（广东省理工农医类）

## 第一卷

1. 如果直线  $ax + 2y + 1 = 0$  与直线  $x + y - 2 = 0$  互相垂直，那么  $a$  的值等于（ ）
- A. 1                      B.  $-\frac{1}{3}$                       C.  $-\frac{2}{3}$                       D. -2
2. 如果直线  $l$  是平面  $\alpha$  的斜线，那么在平面  $\alpha$  内（ ）
- A. 不存在与  $l$  平行的直线                      B. 不存在与  $l$  垂直的直线  
C. 与  $l$  垂直的直线只有一条                      D. 与  $l$  平行的直线有无穷多条
3. 某乒乓球队有 9 名队员，其中 2 名是种子选手，现要挑选 5 名队员参加比赛，种子选手都必须在内，那么不同的选法共有（ ）
- A. 126 种                      B. 84 种                      C. 35 种                      D. 21 种
4. 把 6 个不同的元素排成前后两排，每排 3 个元素，那么不同的排法共有（ ）
- A. 36 种                      B. 120 种                      C. 720 种                      D. 1440 种
5. 一个圆台的母线长是上、下底面半径的等差中项，且侧面积为  $8\pi\text{cm}^2$ ，那么母线长为（ ）
- A. 4cm                      B.  $2\sqrt{2}\text{cm}$                       C. 2cm                      D.  $\sqrt{2}\text{cm}$
6. 如果复数  $z = 3 + ai$  满足条件  $|z - 2| < 2$ ，那么实数  $a$  的取值范围是（ ）
- A.  $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$                       B.  $(-2, 2)$                       C.  $(-1, 1)$                       D.  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
7. 一动点在圆  $x^2 + y^2 = 1$  上移动时，它与定点  $(3, 0)$  连线的中点的轨迹方程是（ ）
- A.  $(x + 3)^2 + y^2 = 4$                       B.  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$   
C.  $(2x - 3)^2 + 4y^2 = 1$                       D.  $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$
8. 函数  $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\text{tg } x}{|\text{tg } x|} + \frac{|\text{ctg } x|}{\text{ctg } x}$  的值域是（ ）
- A.  $\{-2, 4\}$                       B.  $\{-2, 0, 4\}$                       C.  $\{-2, 0, 2, 4\}$                       D.  $\{-4, -2, 0, 4\}$
9. 方程  $\sin 2x = \sin x$  在区间  $(0, 2\pi)$  内的解的个数是（ ）
- A. 4                      B. 3                      C. 2                      D. 1
10. 函数  $y = (x + 4)^2$  在某区间上是减函数，这区间可以是（ ）
- A.  $(-\infty, -4]$                       B.  $[-4, +\infty)$                       C.  $[4, +\infty)$                       D.  $(-\infty, 4]$
11. 已知函数：①  $y = \text{arctg } x$ ，②  $y = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg } x$ 。那么（ ）
- A. ①与②都是奇函数                      B. ①与②都是偶函数  
C. ①是奇函数，②是偶函数                      D. ①与②都不是奇函数，也都不是偶函数

12. 已知下图是函数  $y = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象, 那么 ( )

- A.  $\omega = 2, \varphi = -\frac{\pi}{6}$                       B.  $\omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}$   
C.  $\omega = \frac{10}{11}, \varphi = \frac{\pi}{6}$                       D.  $\omega = \frac{10}{11}, \varphi = -\frac{\pi}{6}$

13. 如果直线  $y = ax + 2$  与直线  $y = 3x - b$  关于直线  $y = x$  对称, 那么 ( )

- A.  $a = \frac{1}{3}, b = -6$                       B.  $a = \frac{1}{3}, b = 6$   
C.  $a = 3, b = -2$                       D.  $a = 3, b = 6$

14. 如果抛物线  $y^2 = a(x+1)$  的准线方程是  $x = -3$ , 那么它的焦点坐标是 ( )

- A. (3,0)                      B. (2,0)                      C. (1,0)                      D. (-1,0)

15. 如果  $\log_a 2 > \log_b 2 > 0$ , 那么 ( )

- A.  $1 < a < b$                       B.  $1 < b < a$                       C.  $0 < a < b < 1$                       D.  $0 < b < a < 1$

16. 复数  $1 + i \operatorname{ctg} \theta$  ( $\pi < \theta < 2\pi$ ) 的三角形形式是 ( )

- A.  $\frac{1}{\sin \theta}(\sin \theta + i \cos \theta)$                       B.  $\frac{1}{\sin \theta} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]$   
C.  $\frac{-1}{\sin \theta} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \right]$                       D.  $\frac{-1}{\sin \theta} \left[ \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \theta \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{2} - \theta \right) \right]$

17. 如果  $x, y$  是实数, 那么 “ $xy > 0$ ” 是 “ $|x+y| = |x| + |y|$ ” 的 ( )

- A. 充分但不必要条件                      B. 必要但不充分条件  
C. 必要而且充分的条件                      D. 既不充分也不必要的条件

18. 极坐标方程  $4\rho \sin^2 \frac{\theta}{2} = 5$  表示的曲线是 ( )

- A. 圆                      B. 椭圆                      C. 抛物线                      D. 双曲线的一支

19. 已知等比数列的公比为 2, 且前 4 项之和等于 1, 那么前 8 项之和等于 ( )

- A. 15                      B. 17                      C. 19                      D. 21

20. 函数  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{\sin x}$  的最小正周期是 ( )

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\pi$       C.  $\frac{3\pi}{2}$       D.  $2\pi$

21.  $\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ - \sqrt{3} \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ$  的值等于 ( )

- A.  $\sqrt{3}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       D.  $-\sqrt{3}$

22. 如果实数  $x, y$  满足  $(x-2)^2 + y^2 = 3$ , 那么  $\frac{y}{x}$  的最大值是 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

23. 以一个正方体的顶点为顶点的四面体共有 ( )

- A. 70 个      B. 64 个      C. 58 个      D. 52 个

24. 设  $z$  是复数,  $z+2$  的辐角为  $\frac{\pi}{3}$ ,  $z-2$  的辐角为  $\frac{5\pi}{6}$ , 那么  $z$  等于 ( )

- A.  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$       B.  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$       C.  $-\sqrt{3} + i$       D.  $-1 + \sqrt{3}i$

25. 设函数  $y = \operatorname{arctg} x$  的图象沿  $x$  轴正方向平移 2 个单位, 所得到的图象为  $C$ . 又设图象  $C_1$  与  $C$  关于原点对称,

那么  $C_1$  所对应的函数是 ( )

- A.  $y = -\operatorname{arctg}(x-2)$       B.  $y = \operatorname{arctg}(x-2)$   
C.  $y = -\operatorname{arctg}(x+2)$       D.  $y = \operatorname{arctg}(x+2)$

### 第二卷

一、(本题满分 15 分) 本题共有 5 小题, 每小题都有用横线表示的空位, 请把你认为合适的内容写在横线上的空位里, 每道小题满分 3 分.

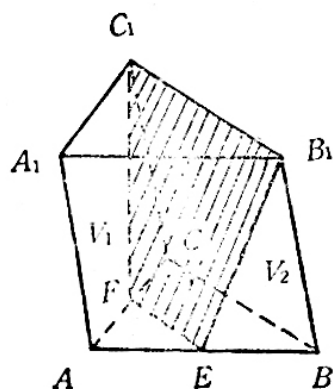
1. 双曲线  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  的准线方程是\_\_\_\_\_.

2.  $(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 - (x-1)^4$  的展开式中,  $x^2$  的系数等于\_\_\_\_\_.

3. 已知  $\{a_n\}$  是公差为零的等差数列, 如果  $S_n$  是  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和, 那么

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n}$  的值等于\_\_\_\_\_.

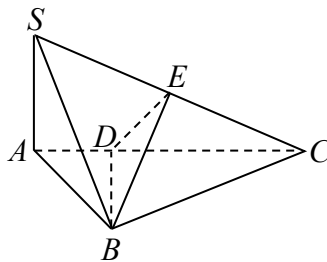
4. 函数  $y = \sin x + \cos x$  的最大值是\_\_\_\_\_.



5. 如图, 三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 若  $E, F$  分别为  $AB, AC$  的中点, 平面  $EB_1C_1F$  将三棱柱分成体积为  $V_1, V_2$  的两部分, 那么  $V_1:V_2$  等于\_\_\_\_\_.

二、(本题满分 13 分)

如图, 在三棱锥  $S-ABC$  中,  $SA \perp$  底面  $ABC$ ,  $AB \perp BC$ ,  $DE$  垂直平分  $SC$ , 且分别交  $AC, SC$  于  $D, E$ , 又  $SA = AB = a, BC = \sqrt{2}a$ .



- (1) 求证:  $SC \perp$  面  $BDE$ ;
- (2) 求面  $BDE$  与面  $BDC$  所成的二面角的大小.

三、(本题满分 14 分)

已知椭圆的焦点为  $F_1(0, -1)$  和  $F_2(0, 1)$ , 直线  $y = 4$  是椭圆的一条准线.

- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 又设点  $P$  在这个椭圆上, 且  $|PF_1| - |PF_2| = 1$ , 求  $\text{tg} \angle F_1PF_2$  的值.

四、(本题满分 14 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和的公式是  $S_n = \frac{\pi}{12}(2n^2 + n)$ .

- (1) 求证  $\{a_n\}$  是等差数列, 并求出它的首项和公差;
- (2) 记  $b_n = \sin a_n \square \sin a_{n+1} \square \sin a_{n+2}$ , 求证: 对任何自然数  $n$ , 都有  $b_n = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1)^{n-1}$

五、(本题满分 14 分)

设  $f(x) = \lg \frac{1+2^x+4^x a}{3}$ . 其中  $a \in R$ .

- (1) 如果  $0 < a \leq 1$ , 求证: 当  $x \neq 0$  时, 有  $2f(x) < f(2x)$ ;
- (2) 如果当  $x \in (-\infty, 1]$  时  $f(x)$  有意义, 求  $a$  的取值范围.

# 1990 年广东省理工农医类数学试题解答及评分标准

## 第一卷

### 本卷考查基础知识和基本技能

每一道小题，选对给 2 分，不选、选错或者选出的代号超过一个的，一律给 0 分。25 道小题的给分之和就是本卷全卷的给分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
答案	D	A	C	C	C	D	C	B	B	A	A	B	B

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	D	A	C	B	B	D	B	C	D	D

## 第二卷

一、本题考查基础知识和基本技能，只需直接写出结果。

每一道小题，结果正确的，给 3 分，5 道小题的给分之和就是本题全题的给分。

1.  $x = \pm \frac{16}{5}$ . (若只填一个准线方程，不给分)      2. -10      3. 2

4.  $\sqrt{2}$       5. 7:5

二、本题主要考查直线和平面、直线和直线的位置关系、二面角等基本知识，以及逻辑推理能力和空间想象能力。证出第 1 小题给 5 分，解出第 1 小题给 8 分：

1. 证：∵  $SA \perp$  底面  $ABC$ ，∴  $SA \perp AB$ . ..... 1 分

在  $Rt\triangle SAB$  中，∵  $SA = AB = a$ ，∴  $SB = \sqrt{2}a$ .

由于  $BC = \sqrt{2}a$ ，

且  $E$  是  $SC$  的中点，

因此  $BE$  是等腰三角形  $SBC$  的底边  $SC$  的中线，

所以  $SC \perp BE$ . ..... 3 分

又已知  $SC \perp DE$ ， $BE \cap DE = E$ ，∴  $SC \perp$  面  $BDE$ . ..... 5 分

2. 解：由 1 的结论知  $SC \perp$  面  $BDE$ ，∴  $SC \perp BD$ ，

又∵  $SA \perp$  底面  $ABC$ ， $BD \subset$  底面  $ABC$ ，∴  $SA \perp BD$ ，而  $SC \cap SA = S$ ，

∴  $BD \perp$  面  $SAC$ 。

∴  $DE =$  面  $SAC \cap$  面  $BDE$ 。  $DC =$  面  $SAC \cap$  面  $BDC$ ，∴  $\angle EDC$  是面  $BDE$  与面  $BDC$  所成的二面角的平面角。

..... 9 分

在  $\triangle ABC$  中，∵  $AB \perp BC$ ， $AB = a$ ， $BC = \sqrt{2}a$ ，∴  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3}a$ 。

又  $SA = a$ ，且由  $SA \perp$  底面  $ABC$ ，知  $SA \perp AC$ ，所以  $\text{tg} \angle ACS = \frac{SA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

∴  $\angle ACS = 30^\circ$ 。

又已知  $DE \perp SC$ ，所以  $\angle EDC = 60^\circ$ ，即所求的二面角的大小为  $60^\circ$ 。 ..... 13 分

三、本题主要考查圆锥曲线的基础知识及其应用，以及运算能力和综合分析能力。解出第 1 小题给 7 分，解出第 2 小题也给 7 分。

1. 解：依题设，椭圆的方程可设为  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ . ..... 2 分

而且可知椭圆的半焦距  $c = 1$ ，又因  $y = 4$  是准线，所以  $\frac{a^2}{c} = 4$ . ..... 4 分

于是  $a^2 = 4c = 4$ ， $b^2 = a^2 - c^2 = 3$ .

因此，所求的椭圆方程为  $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$ . ..... 7 分

2. 解：由 1 的解答知  $a^2 = 4$ ，得  $a = 2$ .

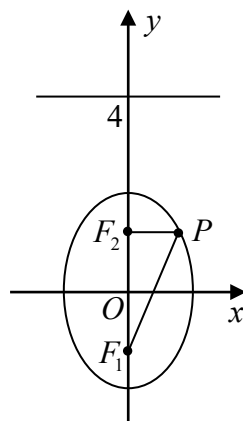
因  $P$  点在椭圆上， $F_1, F_2$  是椭圆的焦点，

依椭圆的定义，有  $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4$ ;

..... 9 分

又由题设  $|PF_1| - |PF_2| = 1$ ，于是，

从以上两式解得  $|PF_1| = \frac{5}{2}$ ， $|PF_2| = \frac{3}{2}$ . ..... 11 分



又  $|F_1F_2| = 2c = 2$ ，对  $\triangle F_1PF_2$  应用余弦定理，有  $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}$

$$= \frac{\frac{25}{4} + \frac{9}{4} - 4}{\frac{15}{2}} = \frac{3}{5}. \text{ 所以 } \operatorname{tg} \angle F_1PF_2 = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \angle F_1PF_2} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{4}{3}. \text{ ..... 14 分}$$

四、本题主要考查数列和三角函数的基础知识，以及运算能力和综合分析能力。证出第 1 小题给 6 分，证出第 2 小题给 8 分。

1. 证：因为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和的公式是  $S_n = \frac{\pi}{12}(2n^2 + n)$ ，所以  $a_1 = S_1 = \frac{\pi}{4}$ . ..... 1 分

$$\text{且当 } n \geq 2 \text{ 时， } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{\pi}{12} [2n^2 + n - 2(n-1)^2 - (n-1)] = \frac{\pi}{12}(4n-1).$$

因此，对任何自然数  $n$ ，都有  $a_n = \frac{\pi}{12}(4n-1)$ . ..... 3 分

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\pi}{12}(4n+3) - \frac{\pi}{12}(4n-1) = \frac{\pi}{3}.$$

所以， $\{a_n\}$  是首项为  $\frac{\pi}{4}$ ，公差为  $\frac{\pi}{3}$  的等差数列. .... 6 分

2. 证: 由 1 的结论知  $\{a_n\}$  的通项公式是  $a_n = \frac{\pi}{12}(4n-1)$ .

因为对任何自然数  $n$ ,  $4n-1$  都是奇数, 从而  $a_n$  不是  $\pi$  的整数倍, 所以  $\sin a_n \neq 0$ ,

$$b_n = \sin a_n \square \sin a_{n+1} \square \sin a_{n+2} \neq 0. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

于是  $b_1 = \sin a_1 \square \sin a_2 \square \sin a_3$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \square \sin \frac{7\pi}{12} \square \sin \frac{11\pi}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \square \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \square \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\sqrt{2}}{8}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

又因为  $\{a_n\}$  是公差为  $\frac{\pi}{3}$  的等差数列, 故当  $n \geq 1$  时,  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sin a_{n+3}}{\sin a_n} = \frac{\sin \left( a_n + \frac{3\pi}{3} \right)}{\sin a_n} = -1$ .

所以,  $\{b_n\}$  是首项为  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ , 公比为  $-1$  的等比数列, 从而对任何自然数  $n$ ,

$$\text{都有 } b_n = \frac{\sqrt{2}}{8} (-1)^{n-1}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

五、本题主要考查指数函数、对数函数和不等式的基本性质, 以及综合运用数学知识分析和解决问题的能力. 解出第 1 小题给 7 分, 解出第 2 小题也给 7 分.

1. 解: 因为  $f(x) = \lg \frac{1+2^x+4^x a}{3}$ , 所以  $2f(x) = \lg \frac{(1+2^x+4^x a)^2}{9}$ ,

$$f(2x) = \lg \frac{1+2^{2x}+4^{2x} a}{3}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

记  $p=1$ ,  $q=2^x$ ,  $r=4^x a$ , 由  $x \neq 0$ , 可知  $p \neq q$ , 从而  $p^2+q^2 > 2pq$ , 又  $q^2+r^2 \geq 2qr$ ,  $r^2+p^2 \geq 2rp$ ,

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{1}{9}(1+2^x+4^x a)^2 &= \frac{1}{9}(p+q+r)^2 \\ &= \frac{1}{9}(p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp) < \frac{1}{9}(p^2+q^2+r^2+p^2+q^2+q^2+r^2+r^2+p^2) \\ &= \frac{1}{3}(p^2+q^2+r^2) = \frac{1}{3}(1+2^{2x}+4^{2x} a^2). \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \end{aligned}$$

因为  $0 < a \leq 1$ , 所以  $a^2 \leq a$ , 从而  $4^{2x} a^2 \leq 4^{2x} a$ ,

$$\text{因此 } \frac{1}{9}(1+2^x+4^x a)^2 < \frac{1}{3}(1+2^{2x}+4^{2x} a).$$

因为  $\frac{1}{9}(1+2^x+4^x a)^2 > 0$ ，又常用对数函数是增函数，

$$\text{所以 } \lg \frac{(1+2^x+4^x a)^2}{9} < \lg \frac{1+2^{2x}+4^{2x} a}{3},$$

即当  $x \neq 0$  时，有  $2f(x) < f(2x)$ . ..... 7 分

2. 解：当  $x \in (-\infty, 1]$  时  $f(x)$  有意义的条件是  $1+2^x+4^x a > 0$ ， $x \in (-\infty, 1]$ .

$$\text{即 } a > -\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right], \quad x \in (-\infty, 1]. \quad \textcircled{1} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

因为  $-\left(\frac{1}{4}\right)^x$  与  $-\left(\frac{1}{2}\right)^x$  在  $(-\infty, 1]$  上都是增函数，所以  $-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$  在  $(-\infty, 1]$  上也是增函数，从而它在  $x=1$  时

$$\text{取最大值： } -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

因此， $\textcircled{1}$  式等价于  $a > -\frac{3}{4}$ .

也就是所求的取值范围为  $\left\{a \mid a > -\frac{3}{4}\right\}$ . ..... 14 分