【编者按】 本卷(上海试卷)满分为150分，而实际平均得分仅为75.19分．上海各界人士众多评论，可见上海诸报．

1991年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试题

一、(本大题满分30分)本大题共有10题，只要求直接填写结果，每个空格填对得3分，否则一律得零分．

1．函数 $y=3^x(x\geqslant 0)$ 的反函数是______．

2．已知 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}$，则 $\cos\frac{\theta}{2}=$______．

3．一个圆柱的底面直径和高都等于一个球的直径，则这个圆柱的体积与球体积的比值为______．

4．函数 $y=\sin(\pi x+2)$ 的最小正周期是______．

5．椭圆 $x^2+4y^2=1$ 的离心率是______．

6．在无穷等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3\sqrt{3}$，$a_3=\sqrt{3}$．则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})=$______．

7．若母线长为4的圆锥的轴截面的面积为8，则圆锥的侧面积为______(结果中保留 π)．

8．$\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中的常数项为____(结果用数值表示)．

9．设函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，若当 $x\leqslant 1$ 时，$y=x^2+1$，则当 $x>1$ 时，$y=$______．

10．设有半径为4的圆，它在极坐标系内的圆心坐标是 $(4,\pi)$，则这圆的极坐标方程是______．

二、(本大题满分30分)本大题共有10题，每一题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得3分，不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内)，一律得零分．

11．若全集 $I=R$，$A=\{x|\sqrt{x+1}\leqslant 0\}$，$B=\{x|\lg(x^2-2)=\lg x\}$，则 $A\cap\bar{B}$ 是(　　)．

(A) $\{2\}$；(B) $\{-1\}$；(C) $\{x|x\leqslant -1\}$；(D) $\varnothing$．

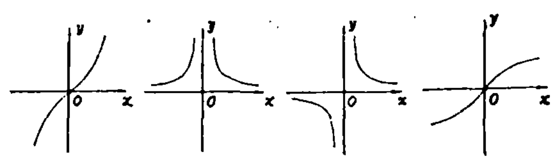
12．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=450$，则 a_2+a_8 的值等于(　　)．

(A) 45；(B) 75；(C) 180；(D) 300．

13．设长方体的对角线的长度是4，过每一顶点有两条棱与对角线的夹角都是60°，则此长方体的体积是(　　)．

(A) $\frac{32}{72}\sqrt{3}$；(B) $8\sqrt{2}$；(C) $8\sqrt{3}$；(D) $16\sqrt{3}$．

14．下列各函数图象中，表示函数 $y=x^{-\frac{1}{3}}$ 的是(　　)．



(A)　(B)　(C)　(D)

15．下列四个命题中的假命题是(　　)．

(A) 存在这样的 α 和 β 的值，使得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

(B) 不存在无穷多个 α 和 β 的值，使得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

(C) 对于任意的 α 和 β，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

(D) 不存在这样的 α 和 β 的值，使得 $\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$．

16．设有编号为1,2,3,4,5的五个球和编

号为 1,2,3,4,5 的五个盒子，现将这五个球投放入这五个盒内,要求每个盒内投放一个球,并且恰好有两个球的编号与盒子的编号相同，则这样的投放方法的总数为(　　).

(A) 20; (B) 30; (C) 60; (D) 120.

17. 下列四个式子中,正确的是(　　).

(A) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)>\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$;

(B) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{2}{3}\right)>\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$;

(C) $\sin\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$

$>\sin\left[\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$;

(D) $\mathrm{tg}\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$

$>\mathrm{tg}\left[\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.

18. 设直线 a 在平面M内，则平面M平行于平面N是直线 a 平行于平面N的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件;

(B) 必要条件但非充分条件;

(C) 充分必要条件;

(D) 非充分条件也非必要条件.

19. 下列参数方程(t 为参数) 与普通方程 $x^2-y=0$ 表示同一曲线的方程是(　　).

(A) $\begin{cases}x=|t|,\\y=t^2;\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x=\cos t,\\y=\cos^2 t;\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x=\mathrm{tg}t,\\y=\dfrac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t};\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x=\mathrm{tg}t,\\y=\dfrac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}.\end{cases}$

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，设曲线 $4x^2-y^2=4$ 的一条倾角为锐角的渐近线为L,现在平移坐标轴,把原点O移到 $O'(3,-4)$, 则渐近线L在新坐标系 $x'O'y'$ 中的方程是(　　).

(A) $2x'-y'+10=0$;

(B) $2x'-y'-10=0$;

(C) $2x'+y'+2=0$;

(D) $2x'+y'-2=0$.

三、(本大题满分 30 分)本大题共有 3 题.

21. (本题满分 8 分)

已知 $\sin\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, 求 $\cos 4x$ 的值.

22. (本题满分 10 分)

设有一颗彗星，围绕地球沿一抛物线轨道运行,地球恰好位于这抛物线轨道的焦点处.当此彗星离地球为 d (万公里)时，经过地球和彗星的直线与抛物线的轴的夹角为 30°. 求这彗星与地球的最短距离.

23. (本题满分12分)

解关于实数 x 的不等式 $|(\log_a x)^2-1|>2a-1$,其中 $a>0,a\neq1$.

四、(本大题满分60分)本大题共有 4 题.

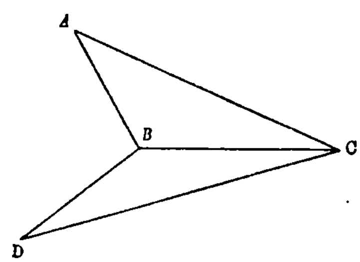
24. (本题满分 14 分)本题共有 3 个小题. 第 1 小题满分 6 分,第 2 小题满分 3 分,第 3 小题满分 5 分.

如图, 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 所在的两平面互相垂直，且 $AB=BC=BD$, $\angle CBA=\angle DBC=120°$. 求

(1) A、D 的连线和平面 BCD 所成的角;

(2) A、D 的连线和直线 BC 所成的角;

(3) 二面角 A—BD—C 的大小(用反三角函数表示).



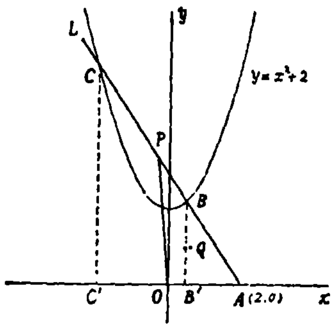
25. (本题满分 14 分)本题共有 2 个小题. 第 1 小题满分 6 分,第 2 小题满分 8 分.

(1) 设复数 z 的辐角为 $\theta(0\leqslant\theta<\pi)$, 且满足等式 $|z-i|=1$, 求复数 z^2-zi 的辐角(用含 θ 的式子表示),其中 i 为虚数单位;

(2) 设复数 z 满足等式$|z-i|=1$, 且 $z\neq0,z\neq2i$. 又复数 ω 使得 $\dfrac{\omega}{\omega-2i}\cdot\dfrac{z-2i}{z}$为实数. 问复数 ω 在复平面上所对应的点 Z 的集合是什么图形,并说明理由.

26. (本题满分 16 分)

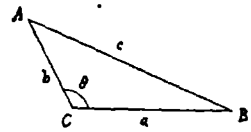
如图，设有一动直线 L，过定点 $A(2,0)$ 且与抛物线 $y=x^2+2$ 相交于不同的两点 B 和 C，



点 B、C 在 x 轴上的射影分别是 B'、C'. P 是线段 BC 上的点，适合关系式 $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{|BB'|}{|CC'|}$. 求 $\triangle POA$ 的重心 Q 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形.

27.（本题满分 16 分）本题共有 3 个小题. **第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 10 分，第 3 小题满分 3 分.**

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$\angle ACB=\theta$. 现将 $\triangle ABC$ 分别以 BC、AC、AB 所在的直线为轴旋转一周，设所得三个旋转体的体积依次为 V_1、V_2、V_3.



(1) 求 $T=\dfrac{V_3}{V_1+V_2}$（用 a、b、c、θ 表示）；

(2) 若 θ 为定值，并令 $\dfrac{a+b}{c}=x$，将 T 表为 x 的函数，写出这函数的定义域，并求这函数的最大值 u；

(3) 当 θ 在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right)$ 内变化时，求 u 的最大值.

附：试题解答及评分标准

一、（第 1 题至第 10 题）每一题结果正确的给 3 分.

1. $y=\log_3 x(x\geqslant 1)$；2. $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$；3. $\dfrac{3}{2}$；

4. 2；5. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；6. $\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$；

7. $8\sqrt{2}\pi$；8. 60；9. $y=x^2-4x+5$；

10. $\rho=-8\cos\theta$.

二、（第 11 题至第 20 题）每一题结果正确的给 3 分.

题　号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
代　号	B	C	B	C	B	A	D	A	D	A

21. [解]由积化和差公式得

$$\frac{1}{2}\left[\sin(2x-\pi)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\frac{1}{4},\quad \textbf{3分}$$

$$\sin 2x=-\frac{1}{2}.\qquad \textbf{5分}$$

$$\therefore\quad \cos 4x=1-2\sin^2 2x=\frac{1}{2}.\qquad \textbf{8 分}$$

22. [解一]设极坐标系如图，使极点 O 位于抛物线的焦点处，Ox 过抛物线的轴.

则抛物线的极坐标方程为

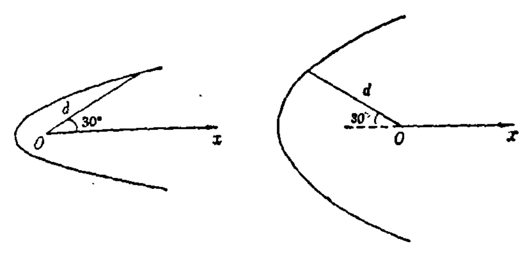
$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}.\qquad \textbf{3 分}$$

由假设可得

情形 1. 当 $\theta=30°$ 时，$\rho=d$，故

$$d=\frac{p}{1-\cos 30°},\quad p=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d,\qquad \textbf{5 分}$$

当 $\theta=\pi$ 时，ρ 有最小值



$$\rho_{\min}=\frac{p}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}d.\qquad 7分$$

情形 2. 当 $\theta=150°$时，$\rho=d$，故

$$d=\frac{p}{1-\cos 150°},\quad p=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d.$$

当 $\theta=\pi$ 时，ρ 有最小值

$$\rho_{\min}=\frac{p}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}d.$$

故这颗彗星与地球的最短距离为

$\frac{2-\sqrt{3}}{4}d$ 或 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}d$（万公里）. **10 分**

［解二］ 设平面直角坐标系 xOy，使 x 轴过抛物线的轴，抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$. **3分**

按假设，地球位于$\left(\frac{p}{2},0\right)$处，当彗星离地球为 d 时，彗星的位置为

$$M\left(\frac{p}{2}+d\cos 30°,\ d\sin 30°\right)或$$

$$M'\left(\frac{p}{2}-d\cos 30°,\ d\sin 30°\right).\qquad 5分$$

将M及 M' 的坐标分别代入 $y^2=2px$，得 $p^2\pm\sqrt{3}\,dp-\frac{d^2}{4}=0$. 解得$p=\left(1\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d.$ **7 分**

当彗星位于 $P(x,y)$时，它与地球的距离为 $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}\geqslant\frac{p}{2}(x\geqslant 0)$. 故当$x=0$ 时，达到最短距离$\frac{p}{2}=\frac{2\mp\sqrt{3}}{4}d$.

因此这颗彗星与地球的最短距离为

$\frac{2-\sqrt{3}}{4}d$ 或 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}d$(万公里). **10分**

(注 1. 只考虑一种情形的至多给 7 分.

注 2. 解二中未说明当 $x=0$ 时达到最短距离理由的，不扣分.)

23.［解］ 当 $0<a<\frac{1}{2}$时，得 $x>0$；**2分**

当 $a=\frac{1}{2}$时，得 $x>0$ 且 $x\neq 2$，$x\neq\frac{1}{2}$；**4分**

当 $a>\frac{1}{2}$时，得

1° $\log_a^2 x-1>2a-1$，即 $\log_a^2 x>2a$.

∴ $\log_a x<-\sqrt{2a}$，或 $\log_a x>\sqrt{2a}$.

当$\frac{1}{2}<a<1$ 时，得 $x>a^{-\sqrt{2a}}$，或 $0<x<a^{\sqrt{2a}}$； **6 分**

当 $a>1$ 时，得 $0<x<a^{-\sqrt{2a}}$，或 $x>a^{\sqrt{2a}}$. **8 分**

2° $-(\log_a^2 x-1)>2a-1$，即 $\log_a^2 x<2(1-a)$.

当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，得 $-\sqrt{2(1-a)}<\log_a x<\sqrt{2(1-a)}$.

∴ $a^{\sqrt{2(1-a)}}<x<a^{-\sqrt{2(1-a)}}$.

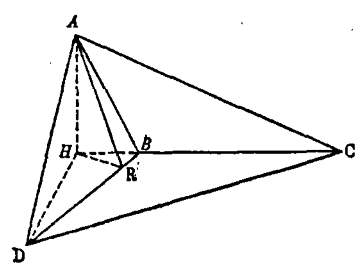
因此所求不等式的解是：当$0<a<\frac{1}{2}$ 时，$x>0$；当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$0<x<\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<x<2$ 或 $x>2$；当$\frac{1}{2}<a<1$ 时，$0<x<a^{\sqrt{2a}}$ 或 $a^{\sqrt{2(1-a)}}<x<a^{-\sqrt{2(1-a)}}$ 或 $x>a^{-\sqrt{2a}}$；当 $a>1$ 时，$0<x<a^{-\sqrt{2a}}$ 或 $x>a^{\sqrt{2a}}$. **12 分**

24.［解］ (1) 连 A、D. 过A点在平面 ABC 内作 BC 的垂线，交 CB 的延长线于 H，连 H、D. 则由面面垂直的性质得 $AH\perp$平面 BCD，HD 为 AD 在平面 BCD 内的射影，$\angle ADH$ 即为 AD 与平面 BCD 所成的角. **3 分**

由题设可知 $\triangle AHB\cong\triangle DHB$，故 $DH\perp HB$，$AH=DH$，$\angle ADH=45°$. 即 AD 与平面 BCD 所成的角为 $45°$. **6 分**

(2) ∵ HD 为 AD 在平面 BCD 内的射影，$BC\perp HD$，∴$AD\perp BC$. 即 A、D 的连线和 BC 所成的角为 $90°$. **9 分**

(3) 在平面 BCD 内，过H作 $HR\perp BD$，垂足为 R. 连 A、R. 则由三垂线定理得$AR\perp BD$.



故$\angle ARH$为二面角$A—BD—C$的平面角的补角. **11分**

设$BC=a$,则由题设得$AH=DH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$HB=\frac{1}{2}a$.

在$\triangle HDB$内,求得$HR=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

$\operatorname{tg}\angle ARH=\frac{AH}{HR}=2$, 故

$\angle ARH=\operatorname{arc\,tg}2$,

二面角$A—BD—C$的大小为$\pi-\operatorname{arctg}2$. **14 分**

25. [解] (1) 设$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)(0\leqslant\theta<\pi)$.

$\because\ |z-i|=1$,即$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta-1)^2=1$,

$\therefore\ r^2-2r\sin\theta=0$. ①

由①得$r=2\sin\theta(0\leqslant\theta<\pi)$. ② **3分**

$$\begin{aligned}\because\ z^2-zi=z(z-i)&=2\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)\\&\quad\times[\sin2\theta+i(2\sin^2\theta-1)]\\&=2\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)(\sin2\theta\\&\quad-i\cos2\theta)\\&=2\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)\\&\quad\times\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right.\\&\quad\left.+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&=2\sin\theta\left[\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right.\\&\quad\left.+i\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

$\therefore\ z^2-zi$的辐角为$\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi$,

$(k\in Z)$. **6 分**

(2) [解一] 设$z=a+bi,\omega=x+yi$,则由题设得$ab\neq0$.

记$u=\frac{\omega}{\omega-2i}\cdot\frac{z-2i}{z}$,则

$$\begin{aligned}u&=\frac{x+yi}{x+(y-2)i}\cdot\frac{a+(b-2)i}{a+bi}\\&=\frac{(x^2+y^2-2y)+2xi}{x^2+(y-2)^2}\\&\quad\times\frac{(a^2+b^2-2b)-2ai}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$ **8 分**

由①得$a^2+b^2-2b=0$;由假设$\operatorname{Im}u=0$,得$a(x^2+y^2-2y)=0$.

$\because\ a\neq0$, $\therefore\ x^2+y^2-2y=0$,

即$x^2+(y-1)^2=1$. **12分**

故ω在复平面上所对应的点Z的集合是以$(0,1)$为圆心、1为半径的圆,除去点$(0,2)$. **14分**

[解二] $\because\ z=2\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{或}\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right),$$

$$\therefore\quad z-2i=2\cos\theta\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\frac{z-2i}{z}=\operatorname{ctg}\theta\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-i\operatorname{ctg}\theta.$$ **8 分**

令$\omega=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,则

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{\omega-2i}&=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r\cos\varphi+(r\sin\varphi-2)i}\\&=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)[r\cos\varphi-(r\sin\varphi-2)i]}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi-2)^2}\\&=\frac{(r^2-2r\sin\varphi)+i\,2r\cos\varphi}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi-2)^2}.\end{aligned}$$ **10分**

由假设:$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega}{\omega-2i}\cdot\frac{z-2i}{z}\right)=0$,得

$$(r^2-2r\sin\varphi)\operatorname{ctg}\theta=0.$$

$\because\operatorname{ctg}\theta\neq0$, $\therefore\ r^2-2r\sin\varphi=0$,

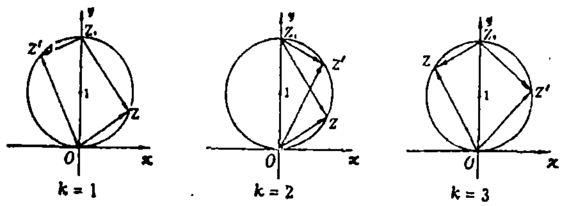
令$\omega=x+iy$,则$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$, 由上式即得

$$x^2+y^2-2y=0.$$ **12分**

因$\omega\neq2i$, 故点ω在复平面上所对应的点Z的集合是以$(0,1)$为圆心、1为半径的圆, 除去点$(0,2)$. **14 分**

[解三] 设$2i,z$分别对应圆$|z-i|=1$上的点Z_1, Z', ω对应复平面上点Z(如图), 则$\omega-0$, $\omega-2i$, $z-2i$, $z-0$分别对应向量$\overrightarrow{OZ}$, $\overrightarrow{Z_1Z}$, $\overrightarrow{Z_1Z'}$, $\overrightarrow{OZ'}$. 记$\angle OZ'Z_1=\alpha$, $\angle OZZ_1=\beta$.

由假设条件Z'在圆上知



$\alpha=\frac{\pi}{2}$，故 $\arg\left(\frac{z-2i}{z}\right)=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3}{2}\pi$. **9 分**

按照复数的乘法、除法的几何意义与假设条件 $\mathrm{Im}u=0$，又可得

$$\arg\left(\frac{\omega-0}{\omega-2i}\right)+\arg\left(\frac{z-2i}{z}\right)=k\pi$$

$(k=1,2,3)$.

故 $\arg\left(\frac{\omega-0}{\omega-2i}\right)=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3}{2}\pi$. 从而 $\beta=\frac{\pi}{2}$. 这说明点 Z 必在圆 $|\omega-i|=1$ 上. **12分**

因此 ω 在复平面上所对应的点 Z 的集合是以(0,1)为圆心、1 为半径的圆，除去点(0,2). **14分**

26. [解] 设动点 $P(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，$\triangle POA$ 的重心 $Q(X,Y)$. 显然 y_0,y_1,y_2 均大于零. 又设 $\frac{y_1}{y_2}=\lambda$，则

$$y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}. \qquad \textbf{2 分}$$

按题意，可设直线 L 的方程为 $y=k(x-2)$ (k 为参数，$k\in R$ 且 $k\neq 0$). ①

由①得 $x=\frac{y+2k}{k}$，代入 $y=x^2+2$，得

$$y=\frac{(y+2k)^2}{k^2}+2,\ \text{即}\ y^2+(4k-k^2)y+6k^2=0. \qquad ②$$

$$\therefore\ \begin{cases}y_1+y_2=k^2-4k,\\ y_1y_2=6k^2,\end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{2}{y_0}=\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{k-4}{6k}. \qquad ③ \qquad \textbf{5 分}$$

又 $k=\frac{y_0}{x_0-2}$，代入③式得

$$4x_0-y_0+4=0. \qquad ④ \qquad \textbf{7 分}$$

$$\therefore\ \begin{cases}X=(x_0+2)/3,\\ Y=y_0/3,\end{cases}\qquad \therefore\ \begin{cases}x_0=3X-2,\\ y_0=3Y.\end{cases}$$

⑤

将⑤式代入④式得 Q 的坐标满足的方程：

$$12X-3Y-4=0. \qquad ⑥ \qquad \textbf{10分}$$

按题意，要使方程②有两相异实根，需 $\Delta=(4k-k^2)^2-24k^2>0$，故得

$$k<4-2\sqrt{6}\ \text{或}\ k>4+2\sqrt{6}. \qquad ⑦$$

当 $k=4\pm2\sqrt{6}$ 时，$y_0=12\pm\sqrt{6}$

$$Y=4\pm\frac{4}{3}\sqrt{6} \qquad ⑧ \qquad \textbf{12分}$$

由⑤、⑥、⑦及 $k=\frac{y_0}{x_0-2}$ 可得 $k=\frac{4Y}{Y-4}$ $(Y\neq 4)$，因而 $Y=\frac{4k}{k-4}=4+\frac{16}{k-4}$.

由于 Y 在 $(-\infty,\ 4-2\sqrt{6})$、$(4+2\sqrt{6},+\infty)$ 内均关于 k 单调减少，故由⑦、⑧可知 $4-\frac{4}{3}\sqrt{6}<Y<4$，或 $4<Y<4+\frac{4}{3}\sqrt{6}$. 因此 $\triangle POA$ 的重心 Q 的轨迹为直线 $12X-3Y-4=0$ 介于 $4-\frac{4}{3}\sqrt{6}<Y<4+\frac{4}{3}\sqrt{6}$ 间的一段，且除去点 $\left(\frac{4}{3},4\right)$. **16分**

（注：未讨论 Y 关于 k 的单调性而直接得出最后结论的，不扣分.）

27. [解] (1) 在 $\triangle ABC$ 中，设 BC、AC、AB 上的高依次为 h_1、h_2、h_3. 则

$$h_1=b\sin\theta,\ h_2=a\sin\theta,\ h_3=\frac{ab\sin\theta}{c}.$$

$$\text{故}\quad V_1=\frac{1}{3}\pi h_1^2a=\frac{\pi}{3}ab^2\sin^2\theta,$$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi h_2^2\,b=\frac{\pi}{3}a^2b\sin^2\theta,$$

$$V_3=\frac{1}{3}\pi h_3^2\,c=\frac{\pi}{3}\frac{a^2b^2}{c}\sin^2\theta,$$

$$T=\frac{V_3}{V_1+V_2}=\frac{ab}{(a+b)c}. \qquad \textbf{3 分}$$

(2) $\because\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$$=(a+b)^2-2ab(1+\cos\theta),$$

$$\frac{a+b}{c}=x,$$

$$\therefore\ ab=\frac{(a+b)^2-c^2}{2(1+\cos\theta)}=\frac{\left[\left(\frac{a+b}{c}\right)^2-1\right]c^2}{2(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{(x^2-1)c^2}{2(1+\cos\theta)},$$

故 $T=\frac{1}{\frac{a+b}{c}}\frac{ab}{c^2}=\frac{x^2-1}{2(1+\cos\theta)x}$

$$=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}\left(x-\frac{1}{x}\right).$$ **7分**

显然 $x=\frac{a+b}{c}>1$. $\because$ $c^2=(a+b)^2-2ab\cdot(1+\cos\theta)\geqslant(a+b)^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(1+\cos\theta)=\frac{1-\cos\theta}{2}(a+b)^2$,

$\therefore$ $x=\frac{a+b}{c}\leqslant\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}$,当 $a=b$ 时成立等式.

故函数 T 的定义域为$\left(1,\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}\right]$. **11分**

因为 T 在$\left(1,\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}\right]$上单调增加,故当 $x=\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}$,即 $a=b$ 时,T 取得最大值

$$T_{\max}=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}\left(\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\cos\theta}},$$

即 $$u=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\cos\theta}}.$$ **13分**

(3) $\because$ $\sqrt{1-\cos\theta}$ 在$[\pi/3,\pi)$上单调增加,$\therefore$ u 在$[\pi/3,\pi)$上单调减少,从而当$\theta=\pi/3$时,u 有最大值 $u_{\max}=1/2$. **16分**