1992年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试题

考生注意：这份试卷共有 26 道试题，满分 150 分.

一、填空题　(本大题满分30分)本大题共有10题，只要求直接填写结果，每个空格填对得3分，否则一律得零分.

1. 求值：$\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=$____________.

2. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数是____________(结果用数值表示).

3. 函数 $y=\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x$ 的最大值是____________.

4. 方程 $\log_5(x+1)-\log_{\frac{1}{5}}(x-3)=1$ 的解是____________.

5. 计算$(\sqrt{3}+i)^6=$____________ (i 是虚数单位).

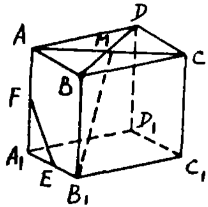
6. 如果直线 l 与直线 $x+y-1=0$ 关于 y 轴对称，那么直线 l 的方程是____________.

7. 已知圆台的下底面半径为 8cm，高为 6cm，母线与下底面成 45°的角，那么圆台的侧面积是____________cm²(结果中保留 π).

8. 已知函数 $y=f(x)$的反函数是$f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1(x\geqslant 0)$，那么函数 $y=f(x)$的定义域是____________.

9. 由 1,2,3，4，5 组成比 40000 小的没有重复数字的五位数的个数是____________(结果用数值表示).

10. 如图，直平行六面体 A_1C 的上底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=60°$，侧面为正方形．E、F 分别是 A_1B_1、AA_1 的中点，M是

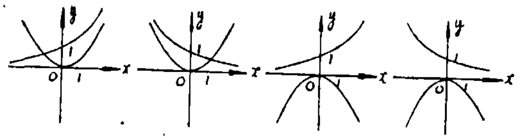


【编者注】 高考上海卷满分为 150 分，平均得分为 101 分；题量已比以往减少一个大题，并适当降低了压轴题的难度.

AC 与 BD 的交点，则 EF 与 B_1M 所成角的大小为__________(用反三角函数表示).

二、选择题　(本大题满分30分)本大题共有10题，每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得3分，不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内)，一律得零分.

11. 当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 和 $y=(a-1)x^2$ 的图象只可能是…………………(　)



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

12. 下列函数中，在区间(0,1]上为减函数的是………………………………………(　)

(A) $y=\log_2 x$;　　(B) $y=x^{\frac{1}{3}}$;

(C) $y=\cos x$;　　(D) $y=\arcsin x$.

13. α、β 是两个不重合的平面，在下列条件中，可判定平面 α 与 β 平行的是 ………(　)

(A) α、β 都垂直平面 γ;

(B) α 内不共线的三点到 β 的距离都相等;

(C) l、m 是 α 内两条直线，且 $l\parallel\beta$，$m\parallel\beta$;

(D) l、m 是两条异面直线，且 $l\parallel\alpha$，$m\parallel\alpha$，$l\parallel\beta$，$m\parallel\beta$.

14. 下列函数中，最小正周期为 π 的偶函数是………………………………………(　)

(A) $y=\sin 2x$;　(B) $y=\cos\frac{x}{2}$;

(C) $y=\sin 2x+\cos 2x$;(D) $y=\frac{1-\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}$.

15. 在方程 $\begin{cases}x=\sin\theta,\\ y=\cos 2\theta\end{cases}$ (θ 为参数)所表示的曲线上的一个点的坐标是………………(　)

(A) $(2,-7)$;　(B) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$;

(C) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;　(D) $(1,0)$.

16. 抛物线 $(y+2)^2=4(x+1)$ 的焦点坐标是………………………………………………(　)

(A) $(0,-2)$;　　(B) $(2,2)$;

(C) $(1,-2)$;　　(D) $(3,2)$.

17. 下列命题中的真命题是…………(　)

(A) 各侧面都是矩形的棱柱是长方体;

(B) 有两个相邻侧面是矩形的棱柱是直棱柱;

(C) 各侧面都是等腰三角形的四棱锥是正四棱锥;

(D) 有两个面互相平行，其余四个面都是等腰梯形的六面体是四棱台.

18. 函数 $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的值域是…(　)

(A) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$;　(B) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$;

(C) $[0,\pi)$;　(D) $(0,\pi]$.

19. 在极坐标系中，与圆 $\rho=4\sin\theta$ 相切的一条直线的方程是…………………………(　)

(A) $\rho\sin\theta=2$;　(B) $\rho\cos\theta=2$;

(C) $\rho\cos\theta=4$;　(D) $\rho\cos\theta=-4$.

20. 设集合 $M=\{x|x>2\}$，$P=\{x|x<3\}$，那么“$x\in M$ 或 $x\in P$”是“$x\in M\cap P$”的 …(　)

(A) 充分条件但非必要条件;

(B) 必要条件但非充分条件;

(C) 充分必要条件;

(D) 非充分条件也非必要条件.

三、(本大题满分36分)　本大题共有3题，解下列各题必须写出必要的步骤.

21. **(本题满分 12 分)**

已知 $\cos 2\alpha=\frac{7}{25}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\beta=-\frac{5}{13}$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，

求 $\alpha+\beta$(用反三角函数表示).

22. **(本题满分 12 分)**

设 $w=z+ai$，其中 a 是实数，i 是虚数单位，$z=\frac{(1-4i)(1+i)+2+4i}{3+4i}$，且 $|w|\leqslant\sqrt{2}$，求 w 的辐角主值 θ 的取值范围.

23. **(本题满分 12 分)**

设动直线 l 垂直于 x 轴，且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 交于 A、B 两点，P 是 l 上满足 $|PA|\cdot|PB|=1$ 的点，求点 P 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形.

四、(本大题满分 54 分)本大题共有 3 题，解下列各题必须写出必要的步骤.

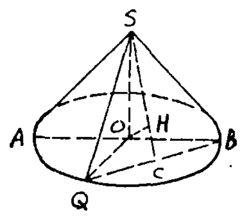
24. **(本题满分 16 分)本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 6 分.**

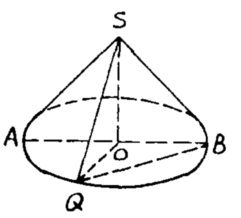
如图，圆锥的轴截面为等腰直角三角形 SAB，Q 为底面圆周上一点.

(1) 如果 QB 的中点为 C，$OH\perp SC$，求证 $OH\perp$ 平面 SBQ；

(2) 如果 $\angle AOQ=60°$，$QB=2\sqrt{3}$，求此圆锥的体积；

(3) 如果二面角 $A\text{-}SB\text{-}Q$ 的大小为 $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{6}}{3}$，求 $\angle AOQ$ 的大小.





25. **(本题满分18分)　本题共有2个小题，第 1 小题满分 9 分，第 2 小题满分 9 分.**

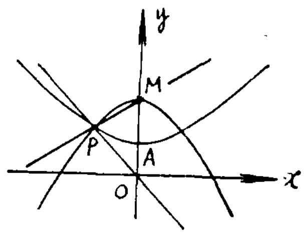
已知数列 $\{a_n\}$，$a_n>0(n\in N)$，它的前 n 项的和记为 S_n.

(1) 如果 $\{a_n\}$ 是一个首项为 a，公比为 q $(0<q\leqslant1)$ 的等比数列，且 $G_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ $(n\in N)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{G_n}$；

(2) 如果 $S_1^2,S_2^2,\cdots,S_n^2,\cdots$ 是一个首项为 3，公差为 1 的等差数列，试比较 S_n 与 $3na_n(n\in N)$ 的大小.

26. **(本题满分 20 分)**

如图，已知双曲线 C：$(1-a^2)x^2+a^2y^2-a^2=0$(参数 $a>0$). 若 C 的上半支的顶点为 A，且与直线 $y=-x$ 交于点 P. 以 A 为焦点，$M(0,m)$ 为顶点的开口向下的抛物线通过点 P. 当 C 的一条渐近线的斜率在区间 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ 上变化时，求直线 PM 斜率的最大值.



解　　答

一、第 1 题至第 10 题.

1. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$；　2. 56；　3. $\frac{3}{2}$；4. 4；

5. -64；　6. $x-y+1=0$；7. $60\sqrt{2}\pi$；

8. $[-1,+\infty)$；　　9. 72；

10. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

二、第 11 题至第 20 题.

题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
代号	D	C	D	D	C	A	B	A	B	B

三、21. [解]　$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}=\frac{4}{5}$，

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5},$$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{12}{13},$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{33}{65}.$$

$$\because\ \pi<\alpha+\beta<2\pi,$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\pi+\arccos\frac{33}{65}.$$

22. [解]　$z=\frac{(1-4i)(1+i)+2+4i}{3+4i}$

$$=\frac{7+i}{3+4i}$$

$$=1-i.$$

因为 $w=z+ai=1+(a-1)i, |w|\leqslant\sqrt{2}$，

所以 $\sqrt{1+(a-1)^2}\leqslant\sqrt{2}$，

解得 $0\leqslant a\leqslant 2$，

又由 $w=1+(a-1)i$，得 $\operatorname{tg}\theta=a-1$. 因此

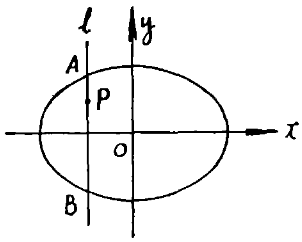
$$-1\leqslant\operatorname{tg}\theta\leqslant 1.$$

所以 θ 的取值范围是

$$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right).$$

23. [解] 设点 P 的坐标为 (x,y)，点 A 的坐标为 (x,y_1). 于是，点 B 的坐标为 $(x,\ -y_1)$. 由于 A、B 两点在椭圆上，所以

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1. \qquad ①$$



又由 $1-\frac{x^2}{4}=\frac{y_1^2}{2}$，得 $-2<x<2$.

$\because\ |PA|=|y_1-y|$，$|PB|=|y_1+y|$，

$|PA|\cdot|PB|=1$，$\therefore\ |y_1-y||y_1+y|=1$，

即 $y_1^2-y^2=\pm 1$.

把 $y_1^2=y^2+1$ 和 $y_1^2=y^2-1$ 分别代入①式，得点 P 的轨迹方程是

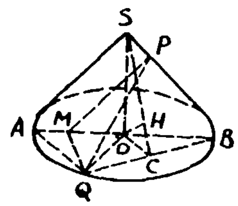
$$\frac{x^2}{2}+y^2=1,$$

和 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\ (-2<x<2)$.

因此，所求轨迹是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，以及椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 夹在两直线 $x=2$，$x=-2$ 之间的部分.

四、24. [解] (1) 连结 OC，$\because SQ=SB$，$OQ=OB$，$QC=CB$. $\therefore QB\perp SC$，$QB\perp OC$，

$\therefore\ QB\perp$ 平面 SOC.



$\because\ OH\subset$ 平面 SOC，

$\therefore\ QB\perp OH$.

又 $OH\perp SC$，

$\therefore\ OH\perp$ 平面 SBQ.

(2) 连结 AQ. $\because Q$ 为圆周上一点，

AB 为直径，$\therefore AQ\perp QB$.

在 $Rt\triangle AQB$ 中，$\angle QBA=30°$，$QB=2\sqrt{3}$，

$$\therefore\ AB=\frac{2\sqrt{3}}{\cos 30°}=4.$$

$\because\ \triangle SAB$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore\ SO=\frac{1}{2}AB=2,$$

$$\therefore\ V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\cdot OA^2\cdot SO=\frac{8}{3}\pi.$$

(3) 过 Q 作 $QM\perp AB$，垂足为 M.

$\because$ 平面 $SAB\perp$ 平面 ABQ，

$\therefore\ QM\perp$ 平面 SAB.

过 M 作 $MP\perp SB$，垂足为 P，连结 PQ，则 $QP\perp SB$(三垂线定理).

$\therefore\ \angle MPQ$ 是二面角 A-SB-Q 的平面角，

$$\angle MPQ=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

设圆锥底面半径为 R，$\angle AOQ=\alpha$. 在 $Rt\triangle OMQ$ 中，

$$QM=R\sin\alpha,\ OM=R\cos\alpha.$$

在 $Rt\triangle MPB$ 中，$\angle PBM=45°$，$MB=R(1+\cos\alpha)$，

$$\therefore\ MP=\frac{\sqrt{2}}{2}R(1+\cos\alpha).$$

$$\because\ \operatorname{tg}\angle MPQ=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore\ \frac{R\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}R(1+\cos\alpha)}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

即 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\therefore\ \angle AOQ=60°.$$

25. (1) [解一] 当 $q=1$ 时，$S_n=na$，G_n

$= na^2$.

$\because\ a\neq 0,\quad \therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{G_n}=\dfrac{1}{a}$.

当 $0<q<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-q}.$$

$$\because\quad \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}=q^2<1,$$

$\therefore$ $\{a_n^2\}$是首项为 a^2，公比为 q^2 的等比数列，

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}G_n=\frac{a^2}{1-q^2}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{G_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}S_n}{\lim\limits_{n\to\infty}G_n}=\frac{1+q}{a}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{G_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & q=1.\\[2mm] \dfrac{1+q}{a}, & 0<q<1.\end{cases}$$

[解二] 当 $q=1$ 时，同解一得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{G_n}=\frac{1}{a}.$$

当 $0<q<1$ 时，$S_n=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$.

同解一得$\{a_n^2\}$是首项为 a^2，公比为 q^2 的等比数列，

$$\therefore\quad G_n=\frac{a^2(1-q^{2n})}{1-q^2}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{G_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+q}{a(1+q^n)}=\frac{1+q}{a}.$$

结论同解一.

(2) [解] 由题设知 $S_1=a_1=\sqrt{3}$.

$S_n^2=3+(n-1)=n+2\ (n\in N)$.

$\because\ S_n>0,\quad \therefore\ S_n=\sqrt{n+2}$.

$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\ (n\geqslant 2)$.

当 $n=1$ 时，$S_1<3a_1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$S_n-3na_n=\sqrt{n+2}-3n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$
$$=3n\sqrt{n+1}-(3n-1)\sqrt{n+2}.$$

由 $\quad(3n\sqrt{n+1})^2-[(3n-1)\sqrt{n+2}]^2$

$$=-3n^2+11n-2$$

$$=-3\left(n-\frac{11-\sqrt{97}}{6}\right)\left(n-\frac{11+\sqrt{97}}{6}\right),$$

可得当 $n=2,3$ 时，$S_n>3na_n$；当 $n\geqslant 4\ (n\in N)$时，$S_n<3na_n$.

综上所述，得

当 $n=1$ 及 $n\geqslant 4(n\in N)$时，$S_n<3na_n$；

当 $n=2,3$ 时，$S_n>3na_n$.

26. [解一] 因为$(1-a^2)x^2+a^2y^2-a^2=0$是双曲线，所以 $1-a^2<0$，从而它可表为

$$y^2-\frac{x^2}{\dfrac{a^2}{a^2-1}}=1.$$

双曲线的两条渐近线的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$，

于是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}\leqslant\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，即 $4\leqslant a^2\leqslant 9$，又由 $a>0$ 得 a 的取值范围是$[2,3]$.

把 $y=-x$ 代入双曲线方程，得点 P 的坐标为$(-a,a)$.

双曲线上半支的顶点为 $A(0,1)$.

以 $A(0,1)$为焦点，$M(0,m)$为顶点的开口向下的抛物线方程为

$$x^2=-4(m-1)(y-m).$$

因为 $P(-a,a)$在抛物线上，所以

$$a^2=-4(m-1)(a-m),\qquad ①$$

即 $\quad m^2-(1+a)m+\left(a-\dfrac{a^2}{4}\right)=0$. 解得

$$m=\frac{1}{2}(1+a\pm\sqrt{1-2a+2a^2}),$$

根据题设抛物线的顶点位置，由①可知 $m>1, m>a$，所以 $m>\dfrac{1+a}{2}$.

因此只取

$$m=\frac{1}{2}(1+a+\sqrt{1-2a+2a^2}).$$

直线 PM 的斜率为

$$k=\frac{m-a}{0-(-a)}$$
$$=\frac{1}{2a}(1-a+\sqrt{1-2a+2a^2}),\qquad ②$$

在②中，令 $u=\dfrac{1}{a}$，有

$$k=\frac{1}{2}(u-1+\sqrt{u^2-2u+2})$$

$$=\frac{1}{2}[\sqrt{(1-u)^2+1}-(1-u)]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1-u)^2+1}+(1-u)}.$$

在[2,3]上，u 是减函数，$1-u$ 是增函数．由 $1-u>0$，可知$(1-u)^2$也是增函数，从而 k 在[2,3]上是减函数．故当 $a=2$ 时，k 取最大值

$$k_{\max}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

［解二］　同解一得双曲线方程为

$$y^2-\frac{x^2}{\dfrac{a^2}{a^2-1}}=1.$$

a 的取值范围为 [2，3]，

点P的坐标为$(-a,a)$。

以A为焦点，M为顶点的开口向下的抛物线方程为

$$x^2=-4(m-1)(y-m).$$

$$a^2=-4(m-1)(a-m), \quad ①$$

$$k=\frac{m-a}{a}, \quad ②$$

由②得 $m=ka+a$，代入①得

$$a^2=4(ka+a-1)ka.$$

因为 $a\neq 0$，所以

$$(4k^2+4k-1)a=4k.$$

根据题设抛物线顶点的位置，由①可知 $m>a$，所以 $k>0$．因此

$$4k^2+4k-1>0.$$

这样　　$a=4k/(4k^2+4k-1)$.

由 a 的取值范围，得

$$2\leqslant\frac{4k}{4k^2+4k-1}\leqslant 3. \quad ③$$

由 $4k^2+4k-1>0$，得 $k>\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$．于是，可由③解得

$$\frac{\sqrt{13}-2}{6}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

因此 $k_{\max}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.