1993年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试题

考生注意：这份试卷共有 26 道试题，满分 150 分

一、填空题(本大题满分 30 分) 本大题共有 10 题，只要求直接填写结果，每个空格填对得

3 分，否则一律得零分．

1. 函数 $y=x^2-2x+3$ 的最小值是____．

2. 函数 $y=\cos^2(\omega x)(\omega>0)$ 的最小正周期是________．

3. 设 $z=\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}$，$i$ 是虚数单位，则 $\bar{z}$ 的辐角主值是______．

4. 1 名老师和 4 名获奖同学排成一排照相留念，若老师不排在两端，则共有不同排法________种(结果用数值表示)．

5. 函数 $y=\arccos x(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数是________________．

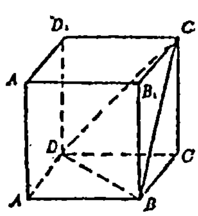
6. P 点分 $\overline{AB}$ 所成的比是 -3，则 B 点分 $\overline{AP}$ 所成的比是__________．

7. 已知圆台的上、下底面半径分别是 10cm 和 20cm，它的侧面展开后所得扇环的圆心角是 180°，那么圆台的侧面积是______cm^2(结果中保留 π)．

8. 已知等比数列 $\{a_n\}(a_n\in R)$，$a_1+a_2=9$，$a_1\cdot a_2\cdot a_3=27$，且 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$__________．

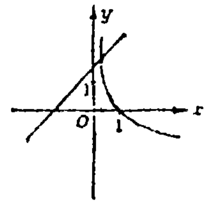
9. 在极坐标系中，过点 $M\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 且平行于极轴的直线的极坐标方程是________________．

10. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过顶点 B、D、C_1 作截面，则二面角 $B-DC_1-C$ 的大小是______________(用反三角函数表示)．

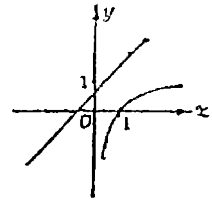


二、选择题(本大题满分 30 分)本大题共有 10 题，每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得3分，不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内)，一律得零分．

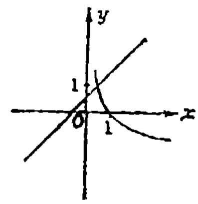
11. 函数 $y=x+a$ 与 $y=\log_a x$ 的图象可能是(　　)



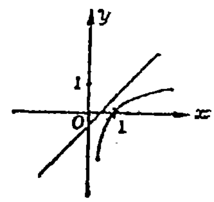
(A)



(B)



(C)



(D)

12. $(x-1)^9$ 按 x 降幂排列的展开式中，系数最大的项是(　　)

(A) 第 4 项和第 5 项；(B) 第 5 项；

(C) 第 5 项和第 6 项；(D) 第 6 项．

13. 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是(　)

(A) $y=\operatorname{arcctg}x$；　(B) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$；

(C) $y=-2^x$；　(D) $y=x^{\frac{1}{3}}$．

14. 下列不等式中正确的是(　　)

(A) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)<\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$；

(B) $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)<\arccos\frac{1}{3}$；

(C) $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}<\arcsin\frac{1}{4}$；

(D) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}<\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$．

15. 动点 P 到直线 $x+4=0$ 的距离减去它到点 $M(2,0)$ 的距离之差等于 2，则点 P 的轨迹是(　　)

(A) 直线；　(B) 椭圆；

(C) 双曲线；(D) 抛物线；

16. 设有三个命题：

甲、底面是平行四边形的四棱柱是平行六面体；

乙、底面是矩形的平行六面体是长方体；

丙、直四棱柱是直平行六面体．

以上命题中真命题的个数是(　　)

(A) 0；(B) 1；(C) 2；(D) 3.

17. 在直角坐标系中平移坐标轴，把原点 $O(0,0)$ 移到 $O'(2,-5)$，点 A 在新坐标系中的坐标为 $(-3,7)$，则点 A 在原坐标系中的坐标是(　　)

(A) $(-1,2)$；　(B) $(1,-2)$；

(C) $(-5,12)$；　(D) $(5,-12)$.

18. 设 a、b 是两条异面直线. 在下列命题中正确的是(　　)

(A) 有且仅有一条直线与 a、b 都垂直；

(B) 有一平面与 a、b 都垂直；

(C) 过直线 a 有且仅有一平面与 b 平行；

(D) 过空间中任一点必可作一条直线与 a、b 都相交.

19. 函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象的一条对称轴方程是(　　)

(A) $x=-\frac{\pi}{2}$；　(B) $x=-\frac{\pi}{4}$；

(C) $x=\frac{\pi}{8}$；　(D) $x=\pi$.

20. "$a+b>2c$"的一个充分条件是(　　)

(A) $a>c$ 或 $b>c$；(B) $a>c$ 且 $b<c$；

(C) $a>c$ 且 $b>c$；(D) $a>c$ 或 $b<c$.

三、(本大题满分 36 分)本大题共有 3 题，解下列各题必须写出必要的步骤.

21. (本题满分 12 分)

已知角 α 的顶点与直角坐标系的原点重合，始边在 x 轴的正半轴上，终边经过点 $P(-1,2)$，求 $\sin\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值.

22. (本题满分 12 分)

已知 $z=\frac{a-i}{1-i}$，其中 i 为虚数单位，$a>0$，复数 $w=z(z+i)$ 的虚部减去它的实部所得的差等于 $\frac{3}{2}$，求复数 w 的模.

23. (本题满分 12 分)

抛物线 $y=-\frac{x^2}{2}$ 与过点 $M(0,-1)$ 的直线 l 相交于 A、B 两点，O 为坐标原点. 若直线 OA 与 OB 的斜率之和为 1，求直线 l 的方程.

四、(本大题满分 54 分)本大题共有 3 题，解下列各题必须写出必要的步骤.

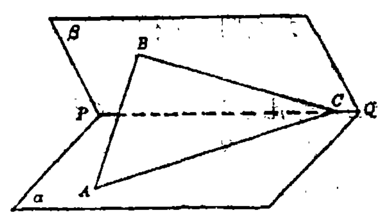
24. (本题满分 16 分)本题共有 3 小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 6 分.

如图，已知二面角 $\alpha-PQ-\beta$ 为 60°，点 A 和点 B 分别在平面 α 和平面 β 上，点 C 在棱 PQ 上，$\angle ACP=\angle BCP=30°$，$CA=CB=a$.

(1) 求证 $AB\perp PQ$；

(2) 求点 B 到平面 α 的距离；

(3) 设 R 是线段 CA 上的一点，直线 BR 与平面 α 所成角的大小为 45°，求线段 CR 的长度.



25. (本题满分 18 分)本题共有 3 小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 8 分.

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=na+n(n-1)b$ $(n=1,2,\cdots)$，a、b 是常数且 $b\neq0$.

(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等差数列；

(2) 证明以 $\left(a_n,\frac{S_n}{n}-1\right)$ 为坐标的点 $P_n(n=1,2,\cdots)$ 都落在同一条直线上，并写出此直线的方程；

(3) 设 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$，C 是以 (r,r) 为圆心、r 为半径的圆 $(r>0)$. 求使得点 P_1、P_2、P_3 都落在圆 C 外时，r 的取值范围.

26. (本题满分 20 分)本题共有 3 小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分，第 3 小题满分 6 分.

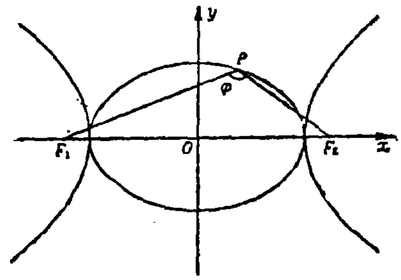
如图，P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 上的一个动点，

它与长轴端点不重合，$a \geqslant \sqrt{2}$，点F_1和F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$的左焦点和右焦点，$\varphi=\angle F_1PF_2$.

(1) 求$\operatorname{tg}\varphi$的表达式(用a及描述点P位置的一个变量来表示)；

(2) 当a固定时，求φ的最小值φ_0；

(3) 当a在区间$[\sqrt{2},\sqrt{3}]$上变化时，求φ_0的取值范围.



解　　答

一、(第1题至第10题) 每一题结果正确的给3分.

1. 2；　2. $\frac{\pi}{\omega}$；　3. $\frac{3\pi}{5}$；　4. 72；

5. $y=\cos x, \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$；　6. 2；

7. 600π；8. 12；　9. $\rho\sin\theta=2$；

10. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

二、(第11题至第20题)每一题结果正确的给3分.

题　号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
代　号	C	B	D	C	D	B	A	C	B	C

三、21. [解一]

$\because\quad r=|OP|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\because\quad \sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，

$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=-\frac{3}{5}$.

$\therefore\quad \sin\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin2\alpha\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$

$+\cos2\alpha\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

[解二]

$\because\quad \operatorname{tg}\alpha=-2$，

$\therefore\quad \sin2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

$\cos2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{3}{5}$.

以下同解一.

22. [解]　$w=\frac{a-i}{1-i}\left(\frac{a-i}{1-i}+i\right)$

$=\frac{(a-i)(a+1)}{(1-i)^2}$

$=\frac{a+1}{2}(1+ai)$.

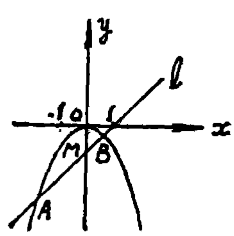
由已知条件，

$\frac{a+1}{2}a-\frac{a+1}{2}=\frac{3}{2}$，　即　$a^2=4$.

由已知　$a>0$，故　$a=2$.

于是　$|w|=\left|\frac{3}{2}+3i\right|=\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

23. [解一]设点A和点B的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2).



由条件可设直线l的方程为$y=kx-1$. 设直线OA和OB的斜率分别为k_{OA}和k_{OB}，则由条件有

$$k_{OA}+k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=1. \qquad ①$$

由于　$y_1=-\frac{x_1^2}{2}$，$y_2=-\frac{x_2^2}{2}$，

故代入①后得　$-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=1$.

于是 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{\left(-\frac{x_2^2}{2}\right)-\left(-\frac{x_1^2}{2}\right)}{x_2-x_1}$

$$=-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=1.$$

因此直线 l 的方程为 $y=x-1$.

[解二]①以前同解一.

直线方程代入抛物线方程得

$$x^2+2kx-2=0. \qquad ②$$

方程②有实数解 x_1 及 x_2，由韦达定理，有

$$x_1+x_2=-2k \text{ 及 } x_1\cdot x_2=-2.$$

由于 $y_1=kx_1-1, y_2=kx_2-1$,

于是①成为

$$1=\frac{kx_1-1}{x_1}+\frac{kx_2-1}{x_2}$$

$$=2k-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=k.$$

因此直线 l 的方程为 $y=x-1$.

[解三]②以前同解二.

方程②的解为

$$x_1=-k-\sqrt{k^2+2},$$

$$x_2=-k+\sqrt{k^2+2}.$$

由于 $y_1=-\frac{x_1^2}{2}$, $y_2=-\frac{x_2^2}{2}$,

于是①成为

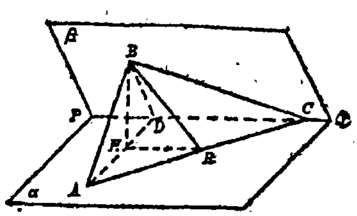
$$1=-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}=-\frac{1}{2}(-k-\sqrt{k^2+2})$$

$$-\frac{1}{2}(-k+\sqrt{k^2+2})=k,$$

因此直线 l 的方程为 $y=x-1$.

四、24[解一] (1)在平面 β 内作 $BD\perp PQ$，垂足为 D，连接 AD.

因 $\angle BCD=\angle ACD$，且 $BC=AC$，DC 为公共边，故 $\triangle BCD\cong\triangle ACD$，所以 $AD\perp PQ$，于是 $PQ\perp$ 平面 ABD，$AB\perp PQ$.



(2) 因 $BD\perp PQ$，$AD\perp PQ$，故 $\angle ADB$ 为二面角 $\alpha-PQ-\beta$ 的平面角，$\angle ADB=60°$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\because BC=a$，$\angle BCD=30°$，

$\therefore BD=\frac{1}{2}a$. 过 B 作 $BH\perp AD$，H 为垂足.

$\because PQ\perp$ 平面 ABD，$\therefore$ 平面 $ABD\perp\alpha$，$BH\perp\alpha$. 于是点 B 到平面 α 的距离

$$BH=BD\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

(3) 连接 HR. 因 $BH\perp\alpha$，故 $\angle BRH$ 是 BR 与平面 α 所成的角，$\angle BRH=45°$.

因 $BH=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，故 $BR=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

在 $\triangle ABD$ 中，$AD=BD$，$\angle ADB=60°$，$\therefore$ $\triangle ABD$ 为正三角形，$AB=BD=\frac{a}{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC=a$，由余弦定理得

$$\cos\angle BCA=\frac{a^2+a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2\cdot a\cdot a}=\frac{7}{8}.$$

在 $\triangle BCR$ 中，设 $x=CR$，由余弦定理得

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2=x^2+a^2-2\,ax\cdot\frac{7}{8},$$

即 $\qquad 8x^2-14ax+5a^2=0.$

$$x_1=\frac{1}{2}a,\quad x_2=\frac{5}{4}a.$$

由于 $\frac{5}{4}a>a$，故 $x_2=\frac{5}{4}a$ 舍去.

因此 CR 的长为 $\frac{1}{2}a$.

[解二] (1)和(2)同解一.

(3) 连接 HR. 因 $BH\perp\alpha$，故 $\angle BRH$ 是 BR 与平面 α 所成的角，$\angle BRH=45°$.

$HR=BH=\frac{\sqrt{3}}{4}a$. 因 $\triangle ADC$ 为 Rt$\triangle$，$\angle DAC=60°$.

在正三角形 ABD 中，$BH\perp AD$，$\therefore AH=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{4}a$.

在 $\triangle ARH$ 中，设 $t=AR$，由余弦定理得

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2=\left(\frac{1}{4}a\right)^2+t^2-2\cdot\frac{1}{4}a\cdot t\cdot\frac{1}{2},$$

即$8t^2-2at-a^2=0$.　$t_1=\frac{1}{2}a$, $t_2=-\frac{1}{4}a$.

因为$-\frac{1}{4}a<0$，故$t_2=-\frac{1}{4}a$ 舍去．因此

$CR=a-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a$.

25.［解］ (1) 由条件得$a_1=S_1=a$. 当$n\geqslant 2$时，有

$$\begin{aligned}a_n=S_n-S_{n-1}&=[na+n(n-1)b]\\&\quad-[(n-1)a+(n-1)(n-2)b]\\&=a+2(n-1)b.\end{aligned}$$

因此，当$n\geqslant 2$时，

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=[a+2(n-1)b]\\&\quad-[a+2(n-2)b]=2b.\end{aligned}$$

因此，$\{a_n\}$是以a为首项，$2b$为公差的等差数列．

(2) $\because b\neq 0$，对于$n\geqslant 2$，有

$$\frac{\left(\frac{S_n}{n}-1\right)-\left(\frac{S_1}{1}-1\right)}{a_n-a_1}=\frac{\frac{na+n(n-1)b}{n}-a}{a+2(n-1)b-a}=\frac{(n-1)b}{2(n-1)b}=\frac{1}{2}.$$

因此，所有的点$P_n\left(a_n,\frac{S_n}{n}-1\right)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$都落在通过$P_1(a,a-1)$且以$\frac{1}{2}$为斜率的直线上．

此直线方程为$y-(a-1)=\frac{1}{2}(x-a)$，即$x-2y+a-2=0$.

(3) 当$a=1$，$b=\frac{1}{2}$时，P_n的坐标为$\left(n,\frac{n-1}{2}\right)$.

使$P_1(1,0)$、$P_2\left(2,\frac{1}{2}\right)$、$P_3(3,\ 1)$都落在圆$C$外的条件是

$$\begin{cases}(r-1)^2+r^2>r^2,\\(r-2)^2+\left(r-\frac{1}{2}\right)^2>r^2,\\(r-3)^2+(r-1)^2>r^2.\end{cases}$$

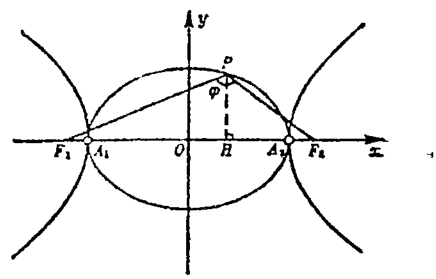
即
$$\begin{cases}(r-1)^2>0, & \cdots\cdots①\\ r^2-5r+\frac{17}{4}>0, & \cdots\cdots②\\ r^2-8r+10>0. & \cdots\cdots③\end{cases}$$

由不等式①，得$r\neq 1$；由不等式②，得$r<\frac{5}{2}-\sqrt{2}$或$r>\frac{5}{2}+\sqrt{2}$；由不等式③，得$r<4-\sqrt{6}$或$r>4+\sqrt{6}$.

再注意到$r>0$，$1<\frac{5}{2}-\sqrt{2}<4-\sqrt{6}<\frac{5}{2}+\sqrt{2}<4+\sqrt{6}$，故使$P_1$、$P_2$、$P_3$都落在圆$C$外时，$r$的取值范围是

$$(0,1)\cup\left(1,\frac{5}{2}-\sqrt{2}\right)\cup(4+\sqrt{6},+\infty).$$

26.［解一］ (1) 双曲线的半焦距$c=\sqrt{a^2+1}$，焦点为$F_1(-\sqrt{a^2+1},\ 0)$和$F_2(\sqrt{a^2+1},0)$. 设$P(x_0,y_0)$为椭圆上一点，与长轴的端点A_1及A_2不重合，由对称性，不妨设$0<y_0\leqslant 1$.



作$PH\perp F_1F_2$，垂足为H. 记$\alpha=\angle F_1PH$，$\beta=\angle HPF_2$，则$\varphi=\alpha+\beta$.

因 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{x_0+\sqrt{a^2+1}}{y_0}$，$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{a^2+1}-x_0}{y_0}$，

$$\text{故 } \operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{2\sqrt{a^2+1}\cdot y_0}{x_0^2+y_0^2-(a^2+1)}.$$

由于$P(x_0,y_0)$在椭圆上，$x_0^2=a^2(1-y_0^2)$，故

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{2\sqrt{a^2+1}\cdot y_0}{(a^2-1)y_0^2+1}.$$

(2) 由于$a\geqslant\sqrt{2}$，故$a^2-1\geqslant 1$，$\operatorname{tg}\varphi<0$，$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$.

$$\operatorname{tg}(\pi-\varphi)=\frac{2\sqrt{a^2+1}\cdot y_0}{(a^2-1)y_0^2+1}$$
$$=\frac{2\sqrt{a^2+1}}{(a^2-1)y_0+\frac{1}{y_0}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-1}},$$

当且仅当 $(a^2-1)y_0=\frac{1}{y_0}$，即 $y_0=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\leqslant 1$ 时取"="号．由于 $0<\pi-\varphi<\frac{\pi}{2}$，且正切函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内是增函数，故有

$$\pi-\varphi\leqslant\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-1}}.$$

于是 $$\varphi\geqslant\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-1}},$$

$$\varphi_0=\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-1}}.$$

(3) $\varphi_0=\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{2}{a^2-1}}$.

由$\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$，故 $2\leqslant a^2\leqslant 3$，$1\leqslant a^2-1\leqslant 2$，

$$1\leqslant\frac{2}{a^2-1}\leqslant 2,\quad 2\leqslant 1+\frac{2}{a^2-1}\leqslant 3,$$

$$\sqrt{2}\leqslant\sqrt{1+\frac{2}{a^2-1}}\leqslant\sqrt{3}.$$

由反正切函数单调性，

$$\operatorname{arctg}\sqrt{2}\leqslant\operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{2}{a^2-1}}$$
$$\leqslant\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

于是$\frac{2\pi}{3}\leqslant\varphi_0\leqslant\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

故 φ_0 的取值范围是

$$\left[\frac{2\pi}{3},\ \pi-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}\right].$$

[解二](1)双曲线的半焦距 $c=\sqrt{a^2+1}$，焦点为 $F_1(-\sqrt{a^2+1}, 0)$ 和F_2 $(\sqrt{a^2+1}, 0)$.

设 $P(a\cos\theta,\sin\theta)$为椭圆上一点，与长轴的端点 A_1 及 A_2 不重合，由对称性，不妨设 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$．记 $\alpha=\angle PF_2x$，$\beta=\angle PF_1x$，故 $\varphi=\alpha-\beta$.

因 PF_1的斜率 $k_1=\frac{\sin\theta}{a\cos\theta+\sqrt{a^2+1}}$，

PF_2的斜率 $k_2=\frac{\sin\theta}{a\cos\theta-\sqrt{a^2+1}}$，故

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=-\frac{2\sqrt{a^2+1}\cdot\sin\theta}{(a^2-1)\sin^2\theta+1}.$$

(2) 由于 $a\geqslant\sqrt{2}$，故 $a^2-1\geqslant 1$，$\operatorname{tg}\varphi<0$，$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$，

故 $$\operatorname{tg}(\pi-\varphi)=\frac{2\sqrt{a^2+1}\cdot\sin\theta}{(a^2-1)\sin^2\theta+1}$$
$$=\frac{2\sqrt{a^2+1}}{(a^2-1)\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}}$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-1}},$$

当且仅当 $(a^2-1)\sin\theta=\frac{1}{\sin\theta}$，

即 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\leqslant 1$ 时取"="号.

以下同解一.