1994年全国普通高等学校招生统一考试
上海　数学试题

考生注意: 这份试卷共有26道试题, 满分150分.

一. 填空题 (本大题满分30分) 本大题共有10题, 只要求直接填写结果, 每个空格填对得3分, 否则一律得零分.

1. 不等式$|x+1|<1$的解是______.

2. 计算: $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)=$______.

3. 以点$C(-2,3)$为圆心且与y轴相切的圆的方程是______.

4. 方程$\log_3(x-1)=\log_9(x+5)$的解是______.

5. 有一个实心圆锥体的零部件, 它的轴截面是边长为10厘米的等边三角形. 现要在它的整个表面镀上一层防腐材料, 已知每平方厘米的工料价为0.10元, 则需要费用______元 (π取3.2).

6. 函数$y=\sqrt{x^2-1}$ $(x\leqslant -1)$的反函数是______.

7. 双曲线$\frac{y^2}{2}-x^2=1$的两个焦点的坐标是______.

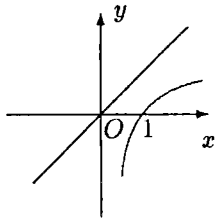
8. $\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)^5$的展开式中$x^5$的系数是______(结果用数值表示).

9. 函数$y=\sin 2x-2\cos^2 x$的最大值是______.

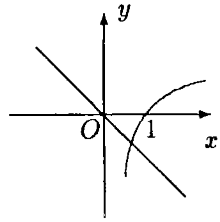
10. 函数$y=\dfrac{\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}$的最小正周期是______.

二. 选择题 (本大题满分30分) 本大题共有10题, 每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得3分, 不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否写在圆括号内), 一律得零分.

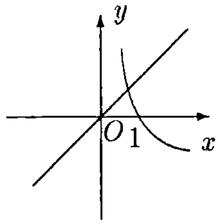
11. 当$a>1$时, 函数$y=\log_a x$和$y=(1-a)x$的图象只可能是 ……………………(　　)



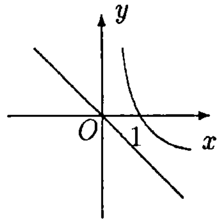
(A)



(B)



(C)



(D)

12. 如果$0<a<1$, 那么下列不等式中正确的是 ……………………………………………(　　)

(A) $(1-a)^{\frac{1}{3}}>(1-a)^{\frac{1}{2}}$;

(B) $\log_{(1-a)}(1+a)>0$;

(C) $(1-a)^3>(1+a)^2$;

(D) $(1-a)^{1+a}>1$.

13. 已知点P的极坐标为$(1,\pi)$, 那么过点P且垂直于极轴的直线的极坐标方程为 (　　)

(A) $\rho=1$;　　(B) $\rho=\cos\theta$;

(C) $\rho=-\frac{1}{\cos\theta}$;　(D) $\rho=\frac{1}{\cos\theta}$.

14. 已知a、b是异面直线, 直线c平行于直线a, 那么c与b ………………………………(　　)

(A) 一定是异面直线;

(B) 一定是相交直线;

(C) 不可能是平行直线;

(D) 不可能是相交直线.

15. 设I是全集, 集合P、Q满足$P\subset Q$, 则下面的结论中错误的是 ……………………(　　)

(A) $P\cup Q=Q$; (B) $\overline{P}\cup Q=I$;

(C) $P\cap\overline{Q}=\varnothing$; (D) $\overline{P}\cap\overline{Q}=\overline{P}$.

16. 设复数$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (i为虚数单位), 则满足等式$z^n=z$, 且大于1的正整数n中最小的是 ……………………………………………( )

(A) 3; (B) 4; (C) 6; (D) 7.

17. 设a、b是平面α外的任意两条线段, 则"a、b的长相等"是"a、b在平面α内的射影长相等"的 ……………………………………………( )

(A) 非充分条件也非必要条件;

(B) 充分必要条件;

(C) 必要条件而非充分条件;

(D) 充分条件而非必要条件.

18. 计划在某画廊展出10幅不同的画, 其中1幅水彩画、4幅油画、5幅国画, 排成一行陈列, 要求同一品种的画必须连在一起, 并且水彩画不放在两端, 那么不同陈列方式有 …………( )

(A) $P_4^4\cdot P_5^5$种; (B) $P_3^3\cdot P_4^4\cdot P_5^5$种;

(C) $C_3^1\cdot P_4^4\cdot P_5^5$种; (D) $P_2^2\cdot P_4^4\cdot P_5^5$种.

19. 在直角坐标系xOy中, 曲线C的方程是$y=\cos x$, 现平移坐标系, 把原点移到点$O'\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$, 则在坐标系$x'O'y'$中, 曲线$C$的方程是 ……………………………………………( )

(A) $y'=\sin x'+\frac{\pi}{2}$; (B) $y'=-\sin x'+\frac{\pi}{2}$;

(C) $y'=\sin x'-\frac{\pi}{2}$; (D) $y'=-\sin x'-\frac{\pi}{2}$.

20. 某个命题与自然数n有关. 如果当$n=k(k\in\mathbf{N})$时该命题成立, 那么可推得当$n=k+1$时该命题也成立. 现已知当$n=5$时该命题不成立, 那么可推得 ……………………………( )

(A) 当$n=6$时该命题不成立;

(B) 当$n=6$时该命题成立;

(C) 当$n=4$时该命题不成立;

(D) 当$n=4$时该命题成立.

三. (本大题满分36分) 本大题共有3题, 解下列各题必须写出必要的步骤.

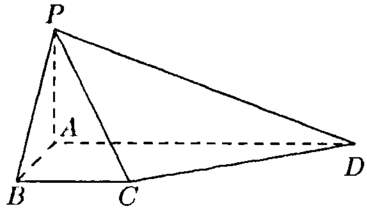
21. (本题满分12分)

已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\operatorname{tg}(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$, 求$\operatorname{tg}(\alpha-2\beta)$的值.

22. (本题满分12分)

设w为复数, 它的辐角的主值为$\frac{3\pi}{4}$, 且$\frac{(\overline{w})^2-4}{w}$为实数, 求复数$w$.

23. (本题满分12分) 本题共有2个小题. 第1小题满分6分, 第2小题满分6分.



如图, 在梯形$ABCD$中, $AD\parallel BC$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$, $AB=a$, $AD=3a$, 且$\angle ADC=\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$, 又$PA\perp$平面$ABCD$, $PA=a$. 求:

(1) 二面角$P-CD-A$的大小 (用反三角函数表示);

(2) 点A到平面PBC的距离.

四. (本大题满分54分) 本大题共有3题. 解下列各题必须写出必要的步骤.

24. (本题满分16分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分10分.

设椭圆的中心为原点O, 一个焦点为$F(0,1)$, 长轴和短轴的长度之比为t,

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设经过原点且斜率为t的直线与椭圆在y轴右边部分的交点为Q, 点P在该直线上, 且$\frac{|OP|}{|OQ|}=t\sqrt{t^2-1}$, 当$t$变化时, 求点$P$的轨迹方程, 并说明轨迹是什么图形.

25. (本题满分18分) 本题共有2个小题. 第1小题满分10分, 第2小题满分8分.

在直角坐标系中, 设矩形$OPQR$的顶点按逆时针顺序依次为$O(0,0)$、$P(1,t)$、$Q(1-2t,2+t)$、$R(-2t,2)$, 其中$t\in(0,+\infty)$.

(1) 求矩形$OPQR$在第一象限部分的面积$S(t)$;

(2) 确定函数$S(t)$的单调区间, 并加以证明.

26. (本题满分20分) 本题共有3个小题. 第1小题满分4分, 第2小题满分8分, 第3小题满分8分.

已知数列$\{a_n\}$满足条件: $a_1 = 1$, $a_2 = r(r > 0)$, 且$\{a_n a_{n+1}\}$是公比为$q(q > 0)$的等比数列, 设$b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

(1) 求出使不等式$a_n a_{n+1} + a_{n+1} a_{n+2} > a_{n+2} a_{n+3}$ $(n \in \mathrm{N})$成立的q的取值范围;

(2) 求b_n和$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{S_n}$, 其中$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$;

(3) 设$r = 2^{19.2} - 1$, $q = \frac{1}{2}$, 求数列$\left\{\dfrac{\log_2 b_{n+1}}{\log_2 b_n}\right\}$的最大项和最小项的值.

1994年全国普通高等学校招生统一考试
上海数学试题解答及评分标准

一、(第1题至第10题) 每一题结果正确的给3分.

1. $-2 < x < 0$; 2. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$;

3. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$; 4. $x = 4$;

5. 24; 6. $y = -\sqrt{x^2+1}(x \geqslant 0)$;

7. $(0, \sqrt{3})$和$(0, -\sqrt{3})$; 8. 40;

9. $\sqrt{2} - 1$; 10. $\frac{\pi}{2}$.

二、(第11题至第20题) 每一题结果正确的给3分.

题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
代号	B	A	C	C	D	B	A	D	B	C

三、 21. [解] $\because \sin\alpha = \dfrac{3}{5}, \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$,

$\therefore \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

$\because \operatorname{tg}(\pi - \beta) = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{1}{2}$,

$$\therefore \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{3}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - 2\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}2\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\beta}$$

$$= \frac{-\frac{3}{4} + \frac{4}{3}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}} = \frac{7}{24}.$$

22. [解一] 设$w = a + bi(a, b \in \mathbf{R})$.

由$\arg w = \dfrac{3\pi}{4}$, 可得$b = -a$且$a < 0$.

$$\frac{(\overline{w})^2 - 4}{w} = \frac{(a - bi)^2 - 4}{a + bi} = \frac{a^2(1+i)^2 - 4}{a(1-i)}$$

$$= -\frac{a^2 + 2}{a} + \frac{a^2 - 2}{a} i$$

由$\dfrac{(\overline{w})^2 - 4}{w}$为实数可知$a^2 - 2 = 0$,

$a = \pm\sqrt{2}$.

$a = \sqrt{2}$不合题意, 舍去.

于是$w = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

[解二] 由题意, 可设

$w = r\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, 则

$$\frac{(\overline{w})^2 - 4}{w} = \frac{(\overline{w})^3 - 4\overline{w}}{w\overline{w}}$$

$$= \frac{r^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^3}{r^2}$$

$$- \frac{4r\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{r^2}$$

$$= \frac{(r^2 + 4) + (4 - r^2)i}{\sqrt{2}r}.$$

由$\dfrac{(\overline{w})^2 - 4}{w}$为实数, 可得$4 - r^2 = 0$.

因此 $r^2 = 4$, $r = 2$.

于是,

$$w = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

23. [解] (1) 在平面$ABCD$内, 过A作$AE \perp CD$, 垂足为E, 连接PE. $\because PA \perp$平面$ABCD$, 由三垂线定理知, $PE \perp CD$.

$\therefore \angle PEA$是二面角$P-CD-A$的平面角.

在$\mathrm{Rt}\triangle AED$中, $AD = 3a$, $\angle ADE = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$.

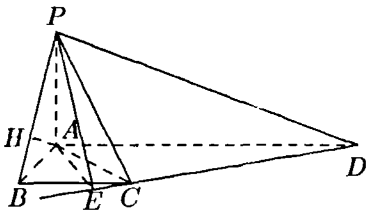
$\therefore AE = AD\cdot\sin\angle ADE = \frac{3\sqrt{5}}{5}a$.

在$\mathrm{Rt}\triangle PAE$中,

$\operatorname{tg}\angle PEA = \frac{PA}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\angle PEA = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}$. 所以,

二面角$P-CD-A$的大小为$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}$.



(2) 在平面PAB中, 过A作$AH\perp PB$, 垂足为H.

$\because PA\perp$平面$ABCD$,

$\therefore PA\perp BC$,

又$AB\perp BC$,

$\therefore BC\perp$平面PAB, $BC\perp AH$,

$\therefore AH\perp$平面PBC.

故AH的长即为点A到平面PBC的距离.

在等腰直角三角形PAB中, $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以, A到平面PBC的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

注: 如果图中点E画在线段CD内, 不扣分.

四、 24. [解] (1) 设所求椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2} = 1(a>b>0)$.

由题意得$\begin{cases}\sqrt{a^2-b^2}=1,\\ \frac{a}{b}=t.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a^2=\frac{t^2}{t^2-1}\\ b^2=\frac{1}{t^2-1}.\end{cases}$

所以椭圆的方程为

$$t^2(t^2-1)x^2+(t^2-1)y^2=t^2.$$

(2) 设点P和Q的坐标分别为(x,y)和(x',y'), 解方程组

$$\begin{cases}t^2(t^2-1)x'^2+(t^2-1)y'^2=t^2\\ y'=tx',\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{2(t^2-1)}},\\ y'=\frac{t}{\sqrt{2(t^2-1)}}.\end{cases}$$

由$\frac{|OP|}{|OQ|}=t\sqrt{t^2-1}$和$\frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{|x|}{|x'|}$得

$$\begin{cases}x=\frac{t}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{t^2}{\sqrt{2}}\end{cases} \text{或} \begin{cases}x=-\frac{t}{\sqrt{2}}\\ y=-\frac{t^2}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

而$t>1$, 于是点P的轨迹方程为

$$x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y\left(x>\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

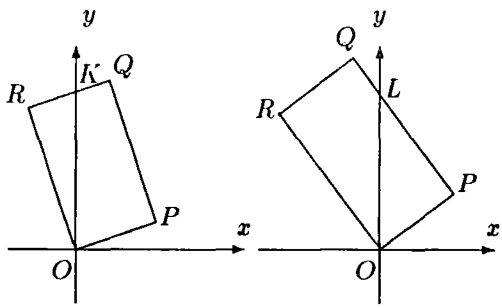
和

$$x^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}y\left(x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

点P的轨迹为抛物线$x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y$在直线$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$右侧的部分和抛物线$x^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}y$在直线$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$左侧的部分.

注: 轨迹中的两段抛物线中, 只求出一段者, 扣2分; 漏写x的范围者, 扣1分.

25. [解] (1) 当$-2t+1>0$即$0<t<\frac{1}{2}$时, 如图, 点Q在第一象限, 此时$S(t)$为四边形$OPQK$的面积, 直线QR的方程为$y-2=t(x+2t)$.



令$x=0$得$y=2t^2+2$, 点K的坐标为$(0,2t^2+2)$,

$$\begin{aligned}S_{OPQK}&=S_{OPQR}-S_{OKR}\\&=2(\sqrt{1+t^2})^2-\frac{1}{2}(2t^2+2)\cdot 2t\\&=2(1-t+t^2-t^3).\end{aligned}$$

当$-2t+1\leqslant 0$即$t\geqslant\frac{1}{2}$时, 如图, 点Q在y轴上或第二象限, $S(t)$为$\triangle OPL$的面积, 直线PQ的方程为$y-t=-\frac{1}{t}(x-1)$.

令$x=0$得$y=t+\frac{1}{t}$,

点L的坐标为$\left(0,t+\frac{1}{t}\right)$.

$$S_{OPL}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot 1=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

所以 $S(t)=\begin{cases}2(1-t+t^2-t^3), & 0<t<\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), & t\geqslant 2.\end{cases}$

(2) 当$0<t<\frac{1}{2}$时, 对于任何$0<t_1<t_2<\frac{1}{2}$, 有$S(t_1)-S(t_2)$

$=2(t_2-t_1)[1-(t_1+t_2)+(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)]>0$,

即$S(t_1)>S(t_2)$, 所以$S(t)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内是减函数.

当$t\geqslant\frac{1}{2}$时, 对于任何$\frac{1}{2}\leqslant t_1<t_2$, 有

$$S(t_1)-S(t_2)=\frac{1}{2}(t_1-t_2)\left(1-\frac{1}{t_1t_2}\right),$$

所以, 若$\frac{1}{2}\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$, 则$S(t_1)>S(t_2)$; 若$1\leqslant t_1<t_2$, 则$S(t_1)<S(t_2)$.

所以$S(t)$在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上是减函数, 在区间$[1,+\infty)$内是增函数.

由

$$2\left[1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]=\frac{5}{4}=S\left(\frac{1}{2}\right)$$

以及上面的证明过程可得, 对于任何$0<t_1<\frac{1}{2}\leqslant t_2<1$, $S(t_1)<\frac{5}{4}\leqslant S(t_2)$.

于是$S(t)$的单调区间分别为$(0,\ 1]$及$[1,+\infty)$, 且$S(t)$在$(0,1]$内减函数, 在$[1,+\infty)$内是增函数.

注: 如得出单调区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$、$\left[\frac{1}{2},1\right]$及$[1,+\infty)$, 但对每个区间上的单调情况证明正确者, 不扣分.

26. [解] 由题意得$rq^{n-1}+rq^n>rq^{n+1}$.

由题设$r>0,q>0$, 故从上式可得$q^2-q-1<0$

解得$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

因$q>0$, 故$0<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) $\because\ \frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=q$,

$$\therefore\ \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=\frac{a_{2n-1}q+a_{2n}q}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q\neq 0.$$

$b_1=1+r\neq 0$, 所以$\{b_n\}$是首项为$1+r$公比为q的等比数列, 从而$b_n=(1+r)q^{n-1}$.

当$q=1$时, $S_n=n(1+r)$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(1+r)}=0;$$

当$0<q<1$时, $S_n=\frac{(1+r)(1-q^n)}{1-q}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q}{(1+r)(1-q^n)}=\frac{1-q}{1+r};$$

当$q>1$时, $S_n=\frac{(1+r)(1-q^n)}{1-q}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q}{(1+r)(1-q^n)}=0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=\begin{cases}\frac{1-q}{1+r}, & 0<q<1,\\ 0, & q\geqslant 1.\end{cases}$

注: 写出b_n而未说明理由者, 扣2分.

(3) 由(2), $b_n=(1+r)q^{n-1}$,

$$\frac{\log_2 b_{n+1}}{\log_2 b_n}=\frac{\log_2[(1+r)q^n]}{\log_2[(1+r)q^{n-1}]}=\frac{\log_2(1+r)+n\log_2 q}{\log_2(1+r)+(n-1)\log_2 q}=1+\frac{1}{n-20.2}.$$

记$c_n=\frac{\log_2 b_{n+1}}{\log_2 b_n}$, 从上式可知, 当$n-20.2>0$, 即$n\geqslant 21(n\in\mathrm{N})$时, c_n随n的增大而减小, 故

$$1<c_n\leqslant c_{21}=1+\frac{1}{21-20.2}=1+\frac{1}{0.8}=2.25, \quad ①$$

当$n-20.2<0$, 即$n\leqslant 20(n\in\mathrm{N})$时, c_n也随n的增大而减小, 故

$$1>c_n\geqslant c_{20}=1+\frac{1}{20-20.2}=1-\frac{1}{0.2}=-4. \quad ②$$

综合①、②两式知, 对任意的自然数n, 有: $c_{20}\leqslant c_n\leqslant c_{21}$.

故$\{c_n\}$的最大项$c_{21}=2.25$, 最小项$c_{20}=-4$.