1994 年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷

（供使用试点教材（文）的考生用）

考生注意：

这份试卷共有 26 道试题，满分 150 分。

一、填空题（本大题满分 30 分）本大题共有 10 题，只要求直接填写结果，每个空格填对得 3 分，否则一律得零分。

1. 不等式 $|x+1|<1$ 的解是________。

2. 函数 $y=\sin^2 x$ 的最小正周期是________。

3. 计算：$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=$________。

4. 以点 $C(-2,3)$ 为圆心且与 y 轴相切的圆的方程是________。

5. 方程 $\log_3(x-1)=\log_9(x+5)$ 的解是________。

6. 函数 $y=\sqrt{x^2-1}\,(x\leqslant -1)$ 的反函数是________。

7. 双曲线 $\dfrac{y^2}{2}-x^2=1$ 的两个焦点的坐标是________。

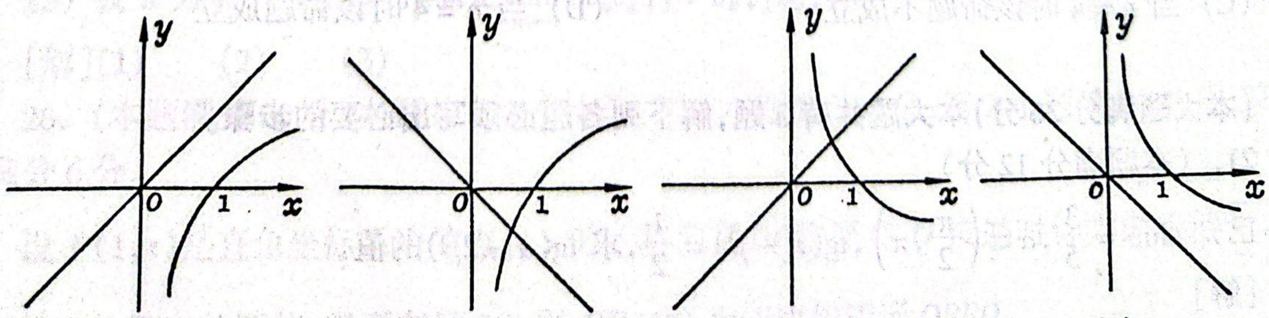
8. $\left(x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式中 x^5 的系数是________（结果用数值表示）。

9. 如果复数 $\dfrac{2+bi}{1-2i}$（其中 i 为虚数单位，b 为实数）的实部和虚部相等，那么 $b=$________。

10. 某商场计划经销某种商品，预测可得盈利 30000 元、26000 元、8000 元的概率分别为 0.3、0.6、0.1，则经销该商品的期望盈利为________元。

二、选择题（本大题满分 30 分）本大题共有 10 题，每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得 3 分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分。

11. 当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 和 $y=(1-a)x$ 的图象只可能是　　（　　）



(A)　(B)　(C)　(D)

（　　）

12. 如果 $0<a<1$,那么下列不等式中正确的是

(A) $(1-a)^{\frac{1}{3}}>(1-a)^{\frac{1}{2}}$　　(B) $\log_{(1-a)}(1+a)>0$

(C) $(1-a)^3>(1+a)^2$　　(D) $(1-a)^{1+a}>1$

13. 已知直线 $2x+y-2=0$ 和 $mx-y+1=0$ 的夹角为$\frac{\pi}{4}$,那么 m 的值为　（　　）

(A) $-\frac{1}{3}$或-3　(B) $\frac{1}{3}$或 3　(C) $-\frac{1}{3}$或 3　(D) $\frac{1}{3}$或-3

14. 已知 a、b 是异面直线,直线 c 平行于直线 a,那么 c 与 b　（　　）

(A) 一定是异面直线　　(B) 一定是相交直线

(C) 不可能是平行直线　　(D) 不可能是相交直线

15. 设 I 是全集,集合 P、Q 满足 $P\subset Q$,则下面的结论中错误的是　（　　）

(A) $P\cup Q=Q$　(B) $\overline{P}\cup Q=I$　(C) $P\cap\overline{Q}=\emptyset$　(D) $\overline{P}\cap\overline{Q}=\overline{P}$

16. 已知 $y=f(x)(x\in R)$是奇函数,$f(5)\neq0$,则下列各点中,在 $y=f(x)$的图象上的点是　（　　）

(A) $(5,f(-5))$　(B) $(-5,-f(5))$　(C) $(-5,f(5))$　(D) $(5,-f(5))$

17. 设 a、b 是平面 α 外的任意两条线段,则“a、b 的长相等”是“a、b 在平面 α 内的射影长相等”的　（　　）

(A) 非充分条件也非必要条件　　(B) 充分必要条件

(C) 必要条件而非充分条件　　(D) 充分条件而非必要条件

18. 9 支足球队中,有 5 支亚洲队,4 支非洲队,从中任意抽取两队进行比赛,则 1 队是亚洲队且 1 队是非洲队的概率是　（　　）

(A) $\frac{C_5^1+C_4^1}{C_9^2}$　(B) $\frac{C_4^1}{C_9^2}$　(C) $\frac{C_5^1}{C_9^2}$　(D) $\frac{C_5^1\cdot C_4^1}{C_9^2}$

19. 在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的方程是 $y=\cos x$,现平移坐标系,把原点移到点 $O'\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$,则在坐标系 $x'O'y'$ 中,曲线 C 的方程是　（　　）

(A) $y'=\sin x'+\frac{\pi}{2}$　　(B) $y'=-\sin x'+\frac{\pi}{2}$

(C) $y'=\sin x'-\frac{\pi}{2}$　　(D) $y'=-\sin x'-\frac{\pi}{2}$

20. 某个命题与自然数 n 有关。如果当 $n=k(k\in N)$时该命题成立,那么可推得当 $n=k+1$ 时该命题也成立。现已知当 $n=5$ 时该命题不成立,那么可推得　（　　）

(A) 当 $n=6$ 时该命题不成立　　(B) 当 $n=6$ 时该命题成立

(C) 当 $n=4$ 时该命题不成立　　(D) 当 $n=4$ 时该命题成立

三、(本大题满分 36 分)本大题共有 3 题,解下列各题必须写出必要的步骤。

21. (本题满分 12 分)

已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\mathrm{tg}(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$,求 $\mathrm{tg}(\alpha-2\beta)$的值。

[解]

22. (本题满分 12 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 7 分,第 2 小题满分 5 分。

已知空间三个点 $P(-2,0,2)$、$Q(-1,1,2)$和 $R(-3,0,4)$。设 $\vec{a}=\overrightarrow{PQ},\vec{b}=\overrightarrow{PR}$。

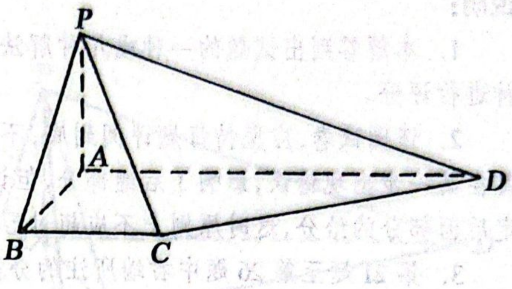
(1) 求 $\vec{a}$与 $\vec{b}$的夹角 θ(用反三角函数表示);

(2) 试确定实数 k,使 $k\vec{a}+\vec{b}$与 $k\vec{a}-2\vec{b}$互相垂直。

[解](1)　　(2)

23. (本题满分 12 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 6 分,第 2 小题满分 6 分。

如图,在梯形 $ABCD$ 中,$AD \parallel BC$,$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,$AB=a$,$AD=3a$,且$\angle ADC=\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$,又 $PA\perp$平面 $ABCD$,$PA=a$。求:



(1) 二面角 $P-CD-A$ 的大小(用反三角函数表示);

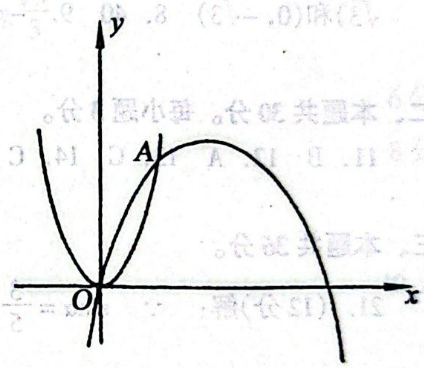
(2) 点 A 到平面 PBC 的距离。

[解] (1)　　(2)

四、(本大题满分 54 分)本大题共有 3 题,解下列各题必须写出必要的步骤。

24. (本题满分 16 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 6 分,第 2 小题满分 10 分。

如图,抛物线 $y=3x^2$ 和 $y=-x^2+4ax(a>0)$交于原点 O 和点 A。



(1) 求这两条抛物线所围成的图形的面积;

(2) 过点 A 作抛物线$y=-x^2+4ax$ 的切线,该切线与抛物线 $y=3x^2$ 交于另一点 P,求线段 AP 的垂直平分线的方程。

[解](1)

25. (本题满分 18 分)本题共有 3 个小题,第 1 小题满分 6 分,第 2 小题满分 6 分,第 3 小题满分 6 分。

设$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,$a_3+a_5=2$,$S_{20}=a_1+a_2+\cdots+a_{20}=150$,又 $b_n=2^{a_n-2a_{n+1}}(n\in N)$。

(1) 求 a_1,d 的值;

(2) 求证$\{b_n\}$是等比数列,并求 b_n;

(3) 设 k 为某个自然数,且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_kb_{k+1}+b_{k+1}b_{k+2}+\cdots+b_nb_{n+1})=\frac{1}{96}$,求 k 的值。

[解](1)　　(2)　　(3)

26. (本题满分 20 分)本题共有 3 个小题,第 1 小题满分 4 分,第 2 小题满分 10 分,第 3 小题满分 6 分。

设 $P(1,t)$是直角坐标系内的点($t>0$)。将向量$\overrightarrow{OP}$绕原点 O 按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$,再把它的模变为原来的两倍,得到向量$\overrightarrow{OQ}$,以 OP、OQ 为邻边作矩形 $OPRQ$。

(1) 求点 Q、R 的坐标;

(2) 求矩形 $OPRQ$ 在第一象限部分的面积 $S(t)$；

(3) 确定函数 $S(t)$ 的单调区间，并加以证明。

[解](1)　(2)　(3)

数学试卷答案及评分标准

说明：

1. 本解答列出试题的一种或几种解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照本解答中评分标准的精神进行评分。

2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误则中断对该题的评阅，当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一道题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分。

3. 第 21 题至第 26 题中右端所注的分数，表示考生正确做到这一步应得的该题的累加分数。

4. 给分或扣分均以 1 分为单位。

一、本题共 30 分。每小题 3 分。

1. $-2<x<0$　2. π　3. -4　4. $(x+2)^2+(y-3)^2=4$　5. $x=4$　6. $y=-\sqrt{x^2+1}(x\geqslant 0)$　7. $(0,\sqrt{3})$和$(0,-\sqrt{3})$　8. 40　9. $-\frac{2}{3}$　10. 25400

二、本题共 30 分。每小题 3 分。

11. B　12. A　13. C　14. C　15. D　16. B　17. A　18. D　19. B　20. C

三、本题共 36 分。

21. (12 分)解：$\because\ \sin\alpha=\frac{3}{5},\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

$\therefore\ \cos\alpha=-\frac{4}{5},\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$　　4 分

$\because\ \operatorname{tg}(\pi-\beta)=\frac{1}{2},\operatorname{tg}\beta=-\frac{1}{2}$,

$$\therefore\ \operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$$　　8 分

$$\operatorname{tg}(\alpha-2\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}2\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\beta}=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{7}{24}$$　　12 分

22. (12 分)第 1 小题 7 分，第 2 小题 5 分。

解：(1) $\vec{a}=\{1,1,0\},\vec{b}=\{-1,0,2\}$,　　2 分

因此，$|\vec{a}|=\sqrt{2},|\vec{b}|=\sqrt{5}$　　4 分

于是，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

故　$\theta=\arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$　　7 分

(2) $(k\vec{a}+\vec{b})\cdot(k\vec{a}-2\vec{b})$

$=\{k-1,k,2\}\cdot\{k+2,k,-4\}$

$=(k-1)(k+2)+k^2-8$ 9分

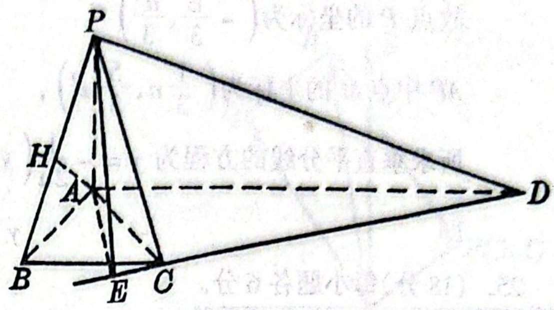
$=2k^2+k-10$

由两个向量互相垂直的充要条件知,当

$$2k^2+k-10=0,$$

即 $k=-\frac{5}{2}$ 或 $k=2$ 时,$k\vec{a}+\vec{b}$ 和 $k\vec{a}-2\vec{b}$ 互相垂直。 12分

23. (12分)每小题6分。



解:(1) 在平面 $ABCD$ 内,过 A 作 $AE\perp CD$,垂足为 E,连接 PE。

$\because$ $PA\perp$ 平面 $ABCD$,由三垂线定理知,

$$PE\perp CD,$$

$\therefore$ $\angle PEA$ 是二面角 $F-CD-A$ 的平面角。 2分

在 Rt△AED 中,$AD=3a$,$\angle ADE=\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore$ $AE=AD\cdot\sin\angle ADE=\frac{3\sqrt{5}}{5}a$ 4分

在 Rt△PAE 中,

$$\mathrm{tg}\angle PEA=\frac{PA}{AE}=\frac{\sqrt{5}}{3},\angle PEA=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}$$

所以,二面角 $P-CD-A$ 的大小为 $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}$ 6分

(2) 在平面 PAB 内,过 A 作 $AH\perp PB$,垂足为 H。 8分

$\because$ $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore$ $PA\perp EC$,又 $AB\perp BC$,

$\therefore$ $BC\perp$ 平面 PAB,$BC\perp AH$, $\therefore$ $AH\perp$ 平面 PBC。

故 AH 的长即为点 A 到平面 PBC 的距离。 10分

在等腰直角三角形 PAB 中,$AH=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

所以,A 到平面 PBC 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 12分

说明:如果图中点 E 画在线段 CD 内,不扣分。

四、本题共54分。

24. (16分)第1小题6分。第2小题10分。

解:(1) 解方程组

$$\begin{cases} y=3x^2, \\ y=-x^2+4ax \end{cases}$$

得点 A 的坐标为 $(a,3a^2)$ 2分

$$S=\int_0^a(-x^2+4ax-3x^2)dx$$

$$=\left(-\frac{4}{3}x^3+2ax^2\right)\Big|_0^a$$

$$=\frac{2}{3}a^3$$ 6分

(2) 由 $y=-x^2+4ax$,得 $y'=-2x+4a$,

故点 A 处切线的斜率为 $2a$,

切线方程为 $$y = 2ax + a^2$$ 10分

解方程组

$$\begin{cases} y = 2ax + a^2 \\ y = 3x^2 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{3} \\ y = \dfrac{1}{3}a^2 \end{cases}$$

故点 P 的坐标为$\left(-\dfrac{a}{3}, \dfrac{a^2}{3}\right)$

AP 中点 M 的坐标为$\left(\dfrac{1}{3}a, \dfrac{5}{3}a^2\right)$， 14分

所求垂直平分线的方程为 $y = -\dfrac{1}{2a}\left(x - \dfrac{a}{3}\right) + \dfrac{5}{3}a^2$，

即 $$y = -\dfrac{1}{2a}x + \dfrac{5}{3}a^2 + \dfrac{1}{6}$$ 16分

25. (18分)每小题各6分。

解： (1) 由题设

$$\begin{cases} a_3 + a_5 = 2, \\ \dfrac{(a_1 + a_{20})\cdot 20}{2} = 150 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} 2a_1 + 6d = 2, \\ 10(2a_1 + 19d) = 150 \end{cases}$$ 4分

解得 $$a_1 = -2, \quad d = 1$$ 6分

(2) $b_n = 2^{a_n - 2a_{n+1}}, b_{n+1} = 2^{a_{n+1} - 2a_{n+2}}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2^{3a_{n+1} - 2a_{n+2} - a_n}$$

$$\because \ 3a_{n+1} - 2a_{n+2} - a_n = -d,$$

$\therefore \ \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 2^{-1}$，因此$\{b_n\}$是等比数列。 10分

又 $b_1 = 1$， $\therefore \ b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 12分

(3) 由(2)得 $b_k b_{k+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k-1}$，$\because \ \dfrac{b_{m+1}b_{m+2}}{b_m b_{m+1}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$$\therefore \ b_k b_{k+1}, b_{k+1}b_{k+2}, \cdots, b_{n-1}b_n, \cdots$$

是首项为$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k-1}$公比为$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$的等比数列 15分

由题设

$$\lim_{n\to\infty}(b_k b_{k+1} + b_{k+1}b_{k+2} + \cdots + b_{n-1}b_n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{8}{3\cdot 2^{2k}} = \frac{1}{96}$$

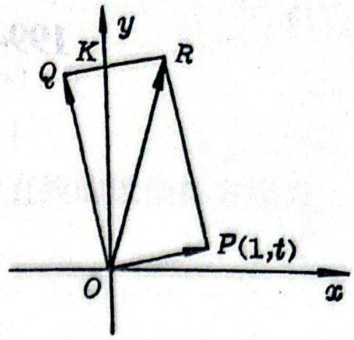
得 $2^{2k} = 2^8$，因此， $$k = 4$$ 18分

26. (20分)第1小题4分。第2小题10分。第3小题6分。

解： (1) $\vec{OP} = \vec{i} + t\vec{j}$，由$\vec{OQ}\cdot\vec{OP} = 0$和$|\vec{OQ}| = 2|\vec{OP}|$得$\vec{OQ} = \pm 2(-t\vec{i} + \vec{j})$

根据题意可知，点 Q 在第二象限，所以点 Q 的坐标为$(-2t, 2)$。又由$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ} = (-2t+1)\vec{i} + (t+2)\vec{j}$得点 R 的坐标为$(-2t+1, t+2)$ 4分

(2) 当 $-2t+1>0$ 即 $0<t<\frac{1}{2}$ 时，如图，点 R 在第一象限，此时 $S(t)$ 为四边形 $OPRK$ 的面积，直线 QR 的方程为 $y-2=t(x+2t)$

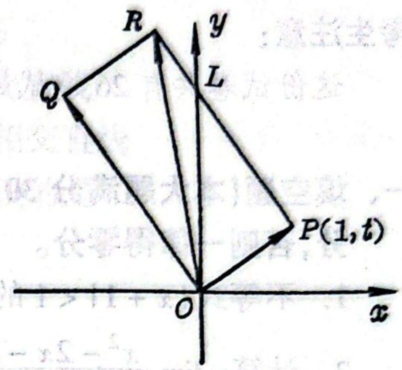


令　$x=0$ 得 $y=2t^2+2$，点 K 的坐标为 $(0,2t^2+2)$

$$\begin{aligned} S_{OPRK} &= S_{OPRQ}-S_{OKQ} \\ &= 2(\sqrt{1+t^2})^2-\frac{1}{2}(2t^2+2)\cdot 2t \\ &= 2(1-t+t^2-t^3) \end{aligned}$$

9 分

当 $-2t+1\leqslant 0$ 即 $t\geqslant\frac{1}{2}$ 时，如图，点 R 在 y 轴上或第二象限内，$S(t)$ 为 $\triangle OPL$ 的面积，直线 PR 的方程为



$$y-t=-\frac{1}{t}(x-1)$$

令　$x=0$　得　$y=t+\frac{1}{t}$，点 L 的坐标为 $\left(0,t+\frac{1}{t}\right)$

$$S_{OPL}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot 1=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

所以
$$S(t)=\begin{cases} 2(1-t+t^2-t^3), & 0<t<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), & t\geqslant\frac{1}{2} \end{cases}$$

14 分

(3) 当　$0<t<\frac{1}{2}$ 时，对于任何 $0<t_1<t_2<\frac{1}{2}$，有

$S(t_1)-S(t_2)=2(t_2-t_1)[1-(t_1+t_2)+(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)]>0$，

即　$S(t_1)>S(t_2)$，所以 $S(t)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内是减函数。　17 分

当 $t\geqslant\frac{1}{2}$ 时，对于任何 $\frac{1}{2}\leqslant t_1<t_2$，有

$$S(t_1)-S(t_2)=\frac{1}{2}(t_1-t_2)\left(1-\frac{1}{t_1t_2}\right)$$

所以，若 $\frac{1}{2}\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$，则 $S(t_1)>S(t_2)$，若 $1\leqslant t_1<t_2$，则 $S(t_1)<S(t_2)$。所以 $S(t)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上是减函数，在区间 $[1,+\infty)$ 内是增函数。

由 $2\left[1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]=\frac{5}{4}=S\left(\frac{1}{2}\right)$ 以及上面的证明过程可得，对于任何 $0<t_1<\frac{1}{2}\leqslant t_2\leqslant 1$，$S(t_1)>\frac{5}{4}\geqslant S(t_2)$。

于是 $S(t)$ 的单调区间分别为 $(0,1]$ 及 $[1,\infty)$，且 $S(t)$ 在 $(0,1]$ 内是减函数，在 $[1,+\infty)$ 内是增函数。　20 分

说明：

如得出单调区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$、$\left[\frac{1}{2},1\right]$ 及 $[1,+\infty)$，但对每个区间上的单调情况证明正确者，不扣分。