1994年全国普通高等学校招生统一考试
上海　数学试题(供使用试点教材(理)的考生用)

考生注意: 这份试卷共有26道试题, 满分150分.

一. 填空题 (本大题满分30分) 本大题共有10题, 只要求直接填写结果, 每个空格填对得3分, 否则一律得零分.

1. 不等式$|x+1|<1$的解是______.

2. 计算: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=$______.

3. 以点$C(-2,3)$为圆心且与y轴相切的圆的方程是______.

4. 方程$\log_3(x-1)=\log_9(x+5)$的解是______.

5. 如果复数$\dfrac{2+bi}{1-2i}$ (其中i为虚数单位, b为实数) 的实部和虚部相等, 那么$b=$______.

6. 函数$y=\sqrt{x^2-1}\ (x\leqslant -1)$的反函数是______.

7. 双曲线$\dfrac{y^2}{2}-x^2=1$的两个焦点的坐标是______.

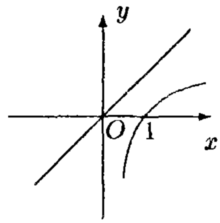
8. $\left(x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^5$的展开式中$x^5$的系数是______(结果用数值表示).

9. 要建造一个长方体形状的仓库, 其内部的高为3m, 长与宽的和为20m, 那么仓库容积的最大值为______ m^3.

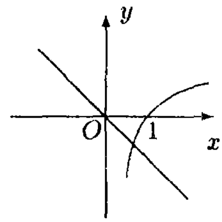
10. 函数$y=\dfrac{\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}$的最小正周期是______.

二. 选择题 (本大题满分30分) 本大题共有10题, 每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得3分, 不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否写在圆括号内), 一律得零分.

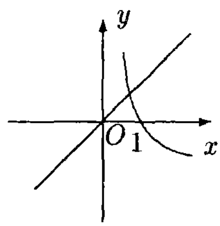
11. 当$a>1$时, 函数$y=\log_a x$和$y=(1-a)x$的图象只可能是 ……………………(　　)



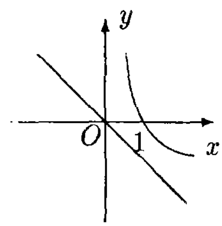
(A)



(B)



(C)



(D)

12. 如果$0<a<1$, 那么下列不等式中正确的是 ………………………………………………(　　)

(A) $(1-a)^{\frac{1}{3}}>(1-a)^{\frac{1}{2}}$;

(B) $\log_{(1-a)}(1+a)>0$;

(C) $(1-a)^3>(1+a)^2$;

(D) $(1-a)^{1+a}>1$.

13. 已知点P的极坐标为$(1,\pi)$, 那么过点P且垂直于极轴的直线的极坐标方程为 (　　)

(A) $\rho=1$;　　(B) $\rho=\cos\theta$;

(C) $\rho=-\dfrac{1}{\cos\theta}$;　(D) $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta}$.

14. 已知a、b是异面直线, 直线c平行于直线a, 那么c与b ………………………………(　　)

(A) 一定是异面直线;

(B) 一定是相交直线;

(C) 不可能是平行直线;

(D) 不可能是相交直线.

15. 设I是全集, 集合P、Q满足$P\subset Q$, 则下面的结论中错误的是 ………………………(　　)

(A) $P\cup Q=Q$;　(B) $\overline{P}\cup Q=I$;

(C) $P\cap\overline{Q}=\varnothing$; (D) $\overline{P}\cap\overline{Q}=\overline{P}$.

16. 设复数$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (i为虚数单位), 则满足等式$z^n=z$, 且大于1的正整数n中最小的是 ……………………………………( )

(A) 3; (B) 4; (C) 6; (D) 7.

17. 设a、b是平面α外的任意两条线段, 则"a、b的长相等" 是 "a、b在平面α内的射影长相等" 的 ……………………………………( )

(A) 非充分条件也非必要条件;

(B) 充分必要条件;

(C) 必要条件而非充分条件;

(D) 充分条件而非必要条件.

18. 9支足球队中, 有5支亚洲队, 4支非洲队, 从中任意抽取两队进行比赛, 则1队是是亚洲队且1队是非洲队的概率是 ………………( )

(A) $\frac{C_5^1+C_4^1}{C_9^2}$; (B) $\frac{C_4^1}{C_9^2}$;

(C) $\frac{C_5^1}{C_9^2}$; (D) $\frac{C_5^1\cdot C_4^1}{C_9^2}$.

19. 在直角坐标系xOy中, 曲线C的方程是$y=\cos x$, 现平移坐标系, 把原点移到点$O'\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$, 则在坐标系$x'O'y'$中, 曲线$C$的方程是 ……………………………………( )

(A) $y'=\sin x'+\frac{\pi}{2}$; (B) $y'=-\sin x'+\frac{\pi}{2}$;

(C) $y'=\sin x'-\frac{\pi}{2}$; (D) $y'=-\sin x'-\frac{\pi}{2}$.

20. 某个命题与自然数n有关. 如果当$n=k(k\in\mathrm{N})$时该命题成立, 那么可推得当$n=k+1$时该命题也成立. 现已知当$n=5$时该命题不成立, 那么可推得 ……………………………( )

(A) 当$n=6$时该命题不成立;

(B) 当$n=6$时该命题成立;

(C) 当$n=4$时该命题不成立;

(D) 当$n=4$时该命题成立.

三. (本大题满分36分) 本大题共有3题, 解下列各题必须写出必要的步骤.

21. (本题满分12分)

已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\mathrm{tg}(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$, 求$\mathrm{tg}(\alpha-2\beta)$的值.

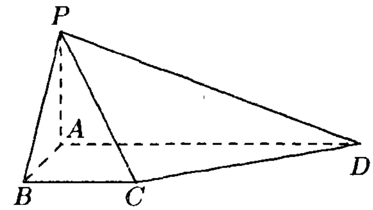
22. (本题满分12分) 本题共有2个小题. 第1小题满分7分, 第2小题满分5分.

已知空间三个点$P(-2,0,2)$, $Q(-1,1,2)$和$R(-3,0,4)$. 设$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{PR}$.

(1) 求$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$的夹角θ (用反三角函数表示);

(2) 试确定实数k, 使$k\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$与$k\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$互相垂直.

23. (本题满分12分) 本题共有2个小题. 第1小题满分6分, 第2小题满分6分.



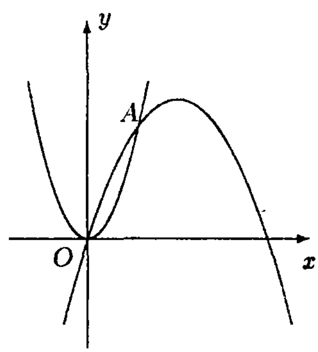
如图, 在梯形$ABCD$中, $AD\parallel BC$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$, $AB=a$, $AD=3a$, 且$\angle ADC=\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$, 又$PA\perp$平面$ABCD$, $PA=a$. 求:

(1) 二面角$P-CD-A$的大小 (用反三角函数表示);

(2) 点A到平面PBC的距离.

四. (本大题满分54分) 本大题共有3题. 解下列各题必须写出必要的步骤.

24. (本题满分16分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分10分.



如图, 抛物线$y=3x^2$和$y=-x^2+4tx$交于原点O和点A.

(1) 当t是大于0的常数时, 求这两条抛物线所围成的图形的面积;

(2) 过点A作抛物线$y=-x^2+4tx$的切线, 该切线与抛物线$y=3x^2$交于点P, 当t在实数范

围内变化时，求线段AP的中点M的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形.

25. (本题满分18分) 本题共有2个小题. 第1小题满分10分，第2小题满分8分.

在直角坐标系中，设矩形$OPQR$的顶点按逆时针顺序依次为$O(0,0)$、$P(1,t)$、$Q(1-2t,2+t)$、$R(-2t,2)$，其中$t\in(0,+\infty)$.

(1) 求矩形$OPQR$在第一象限部分的面积$S(t)$;

(2) 确定函数$S(t)$的单调区间，并加以证明.

26. (本题满分20分) 本题共有3个小题. 第1小题满分4分，第2小题满分8分，第3小题满分8分.

已知数列$\{a_n\}$满足条件: $a_1=1$, $a_2=r(r>0)$，且$\{a_na_{n+1}\}$是公比为$q(q>0)$的等比数列，设$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}$ $(n=1,2,\cdots)$.

(1) 求出使不等式$a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}>a_{n+2}a_{n+3}$ $(n\in\mathrm{N})$成立的q的取值范围;

(2) 求b_n和$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}$，其中$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$;

(3) 设$r=2^{19.2}-1$, $q=\frac{1}{2}$，求数列$\left\{\frac{\log_2 b_{n+1}}{\log_2 b_n}\right\}$的最大项和最小项的值.

1994年全国普通高等学校招生统一考试上海数学试点(理)试题解答及评分标准

一、(第1题至第10题) 每一题结果正确的给3分.

1. $-2<x<0$;　2. -4;

3. $(x+2)^2+(y-3)^2=4$;

4. $x=4$;　　5. $-\frac{2}{3}$;

6. $y=-\sqrt{x^2+1}(x\geqslant 0)$;

7. $(0,\sqrt{3})$和$(0,-\sqrt{3})$;

8. 40;　　9. 300;　　10. $\frac{\pi}{2}$.

二、(第11题至第20题) 每一题结果正确的给3分.

题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
代号	B	A	C	C	D	B	A	D	B	C

三、21. [解] $\because \sin\alpha=\frac{3}{5}, \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

$\therefore \cos\alpha=-\frac{4}{5}, \mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{3}{4}$.

$\because \mathrm{tg}(\pi-\beta)=\frac{1}{2}, \mathrm{tg}\,\beta=-\frac{1}{2}$,

$\therefore \mathrm{tg}\,2\beta=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}^2\beta}=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$.

$$\mathrm{tg}(\alpha-2\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,2\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,2\beta}$$

$$=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{7}{24}.$$

22. [解] (1) $\overrightarrow{a}=\{1,1,0\}$,

$\overrightarrow{b}=\{-1,0,2\}$,

因此，$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2}, |\overrightarrow{b}|=\sqrt{5}$,

于是

$$cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{10},$$

故$\theta=\arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

(2) $(k\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(k\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})$

$=\{k-1,k,2\}\cdot\{k+2,k,-4\}$

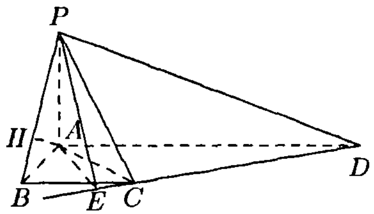
$=(k-1)(k-2)+k^2-8$

$=2k^2+k-10$.

由两个向量互相垂直的充要条件知，当$2k^2+k-10=0$，即$k=-\frac{5}{2}$或$k=2$时，$k\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$和$k\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$互相垂直.

23. [解] (1) 在平面$ABCD$内，过A作AE

$\perp CD$, 垂足为E, 连接PE. $\because$ $PA\perp$平面$ABCD$, 由三垂线定理知 $PE\perp CD$.



$\therefore$ $\angle PEA$是二面角$P-CD-A$的平面角.

在$\mathrm{Rt}\triangle AED$中, $AD=3a$,

$\angle ADE=\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ $AE=AD\cdot\sin\angle ADE=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a$.

在$\mathrm{Rt}\triangle PAE$中,

$\operatorname{tg}\angle PEA=\dfrac{PA}{AE}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$,

$\angle PEA=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. 所以,

二面角$P-CD-A$的大小为$\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

(2) 在平面PAB中, 过A作$AH\perp PB$, 垂足为H.

$\because$ $PA\perp$平面$ABCD$, $\therefore$ $PA\perp BC$, 又$AB\perp BC$,

$\therefore$ $BC\perp$平面PAB, $BC\perp AH$,

$\therefore$ $AH\perp$平面PBC.

故AH的长即为点A到平面PBC的距离.

在等腰直角三角形PAB中, $AH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以, A到平面PBC的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

注: 如果图中点E画在线段CD内, 不扣分.

四、24. [解] (1) 解方程组$\begin{cases} y=3x^2, \\ y=-x^2+4tx, \end{cases}$

得点A的坐标为$(t,3t^2)$.

$$S=\int_0^t(-x^2+4tx-3x^2)\,dx$$
$$=\left(-\frac{4}{3}x^2+2tx^2\right)\Big|_0^t$$
$$=\frac{2}{3}t^3.$$

(2) 由$y=-x^2+4tx$, 得$y'=-2x+4t$.

$\therefore$ 点A处切线的斜率为$2t$, 切线方程为$y=2tx+t^2$.

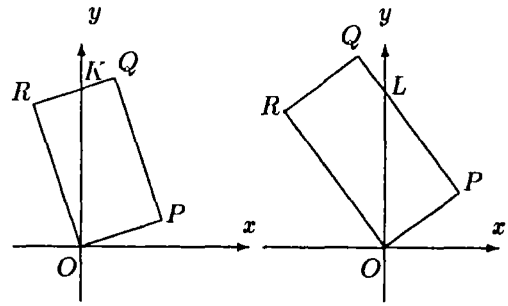
解方程组$\begin{cases} y=2tx+t^2, \\ y=3x^2, \end{cases}$ 得$\begin{cases} x=-\dfrac{t}{3}, \\ y=\dfrac{1}{3}t^2. \end{cases}$

故点P的坐标为$\left(-\dfrac{t}{3},\dfrac{t^2}{3}\right)$.

设AP中点M的坐标为(x,y), 则$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t, \\ y=\dfrac{5}{3}t^2. \end{cases}$

$\therefore$ AP中点M的轨迹方程为$y=15x^2$, 轨迹为抛物线.

25. [解] (1) 当$-2t+1>0$即$0<t<\dfrac{1}{2}$时, 如图, 点Q在第一象限, 此时$S(t)$为四边形$OPQK$的面积, 直线QR的方程为$y-2=t(x+2t)$.



令$x=0$得$y=2t^2+2$, 点K的坐标为$(0,2t^2+2)$,

$$S_{OPQK}=S_{OPQR}-S_{OKR}$$
$$=2(\sqrt{1+t^2})^2-\frac{1}{2}(2t^2+2)\cdot 2t$$
$$=2(1-t+t^2-t^3).$$

当$-2t+1\leqslant 0$即$t\geqslant\dfrac{1}{2}$时, 如图, 点Q在y轴上或第二象限, $S(t)$为$\triangle OPL$的面积, 直线PQ的方程为$y-t=-\dfrac{1}{t}(x-1)$.

令$x=0$得$y=t+\dfrac{1}{t}$,

点L的坐标为$\left(0,t+\dfrac{1}{t}\right)$.

$$S_{OPL}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot 1=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

所以 $S(t)=\begin{cases} 2(1-t+t^2-t^3), & 0<t<\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right), & t\geqslant 2. \end{cases}$

(2) 当$0<t<\dfrac{1}{2}$时, 对于任何$0<t_1<t_2<\dfrac{1}{2}$, 有$S(t_1)-S(t_2)$

$=2(t_2-t_1)[1-(t_1+t_2)+(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)]>0$,

即$S(t_1) > S(t_2)$，所以$S(t)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内是减函数.

当$t \geqslant \frac{1}{2}$时，对于任何$\frac{1}{2} \leqslant t_1 < t_2$，有

$$S(t_1) - S(t_2) = \frac{1}{2}(t_1 - t_2)\left(1 - \frac{1}{t_1 t_2}\right),$$

所以，若$\frac{1}{2} \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$，则$S(t_1) > S(t_2)$；

若$1 \leqslant t_1 < t_2$，则$S(t_1) < S(t_2)$.

所以$S(t)$在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上是减函数，在区间$[1,+\infty)$内是增函数.

由

$$2\left[1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{5}{4} = S\left(\frac{1}{2}\right)$$

以及上面的证明过程可得，对于任何$0 < t_1 < \frac{1}{2} \leqslant t_2 < 1$，$S(t_1) < \frac{5}{4} \leqslant S(t_2)$.

于是$S(t)$的单调区间分别为$(0,\ 1]$及$[1,+\infty)$，且$S(t)$在$(0,1]$内减函数，在$[1,+\infty)$内是增函数.

注：如得出单调区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$、$\left[\frac{1}{2},1\right]$及$[1,+\infty)$，但对每个区间上的单调情况证明正确者，不扣分.

26. [解] 由题意得$rq^{n-1} + rq^n > rq^{n+1}$.

由题设$r > 0, q > 0$，故从上式可得$q^2 - q - 1 < 0$

解得$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

因$q > 0$，故$0 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) $\because \frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_n} = q$，

$$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}}$$

$$= \frac{a_{2n-1}q + a_{2n}q}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q \neq 0.$$

$b_1 = 1 + r \neq 0$，所以$\{b_n\}$是首项为$1 + r$公比为q的等比数列，从而$b_n = (1+r)q^{n-1}$.

当$q = 1$时，$S_n = n(1+r)$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(1+r)} = 0;$$

当$0 < q < 1$时，$S_n = \frac{(1+r)(1-q^n)}{1-q}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q}{(1+r)(1-q^n)} = \frac{1-q}{1+r};$$

当$q > 1$时，$S_n = \frac{(1+r)(1-q^n)}{1-q}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q}{(1+r)(1-q^n)} = 0.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{S_n} = \begin{cases}\frac{1-q}{1+r}, & 0 < q < 1, \\ 0, & q \geqslant 1.\end{cases}$

注：写出b_n而未说明理由者，扣2分.

(3) 由(2)，$b_n = (1+r)q^{n-1}$，

$$\frac{\log_2 b_{n+1}}{\log_2 b_n} = \frac{\log_2[(1+r)q^n]}{\log_2[(1+r)q^{n-1}]}$$

$$= \frac{\log_2(1+r) + n\log_2 q}{\log_2(1+r) + (n-1)\log_2 q}$$

$$= 1 + \frac{1}{n - 20.2}.$$

记$c_n = \frac{\log_2 b_{n+1}}{\log_2 b_n}$，从上式可知，当$n - 20.2 > 0$，即$n \geqslant 21 (n \in \mathbf{N})$时，$c_n$随$n$的增大而减小，故

$$1 < c_n \leqslant c_{21} = 1 + \frac{1}{21 - 20.2} = 1 + \frac{1}{0.8} = 2.25, \quad ①$$

当$n - 20.2 < 0$，即$n \leqslant 20 (n \in \mathbf{N})$时，$c_n$也随$n$的增大而减小，故

$$1 > c_n \geqslant c_{20} = 1 + \frac{1}{20 - 20.2} = 1 - \frac{1}{0.2} = -4. \quad ②$$

综合①、②两式知，对任意的自然数n，有：$c_{20} \leqslant c_n \leqslant c_{21}$.

故$\{c_n\}$的最大项$c_{21} = 2.25$，最小项$c_{20} = -4$.