1995 年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷(文史类)

考生注意:

本试卷共有 25 道试题,满分 150 分。试卷中的选做题按 A_1 组、A_2 组与 B_1 组、B_2 组排列,A_1 组对应 B_1 组,A_2 组对应 B_2 组。考生从对应的两组中可以且只可以选做一组,若同时做了对应的两组试题,或分别做了对应的两组中的部分试题,则只对考生在 A 组中所完成的部分进行评分和计分。

一、选择题(本大题满分 24 分)本大题共有 8 题,每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论,其中有且只有一个结论是正确的,必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内,选对得 3 分,不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内),一律得零分。

1. $y=\sin^2 x$ 是　　(　　)

(A) 最小正周期为 2π 的偶函数　　(B) 最小正周期为 2π 的奇函数

(C) 最小正周期为 π 的偶函数　　(D) 最小正周期为 π 的奇函数

2. 如果,$P=\{x\mid(x-1)(2x-5)<0\}$,$Q=\{x\mid 0<x<10\}$,那么　　(　　)

(A) $P\cap Q=\varnothing$　　(B) $P\subset Q$　　(C) $P\supset Q$　　(D) $P\cup Q=R$

3. 方程 $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 在区间 $[0,2\pi)$ 上解的个数是　　(　　)

(A) 5　　(B) 4　　(C) 3　　(D) 2

4. 设棱锥的底面面积是 8 cm^2,那么这个棱锥的中截面(过棱锥高的中点且平行于底面的截面)的面积是　　(　　)

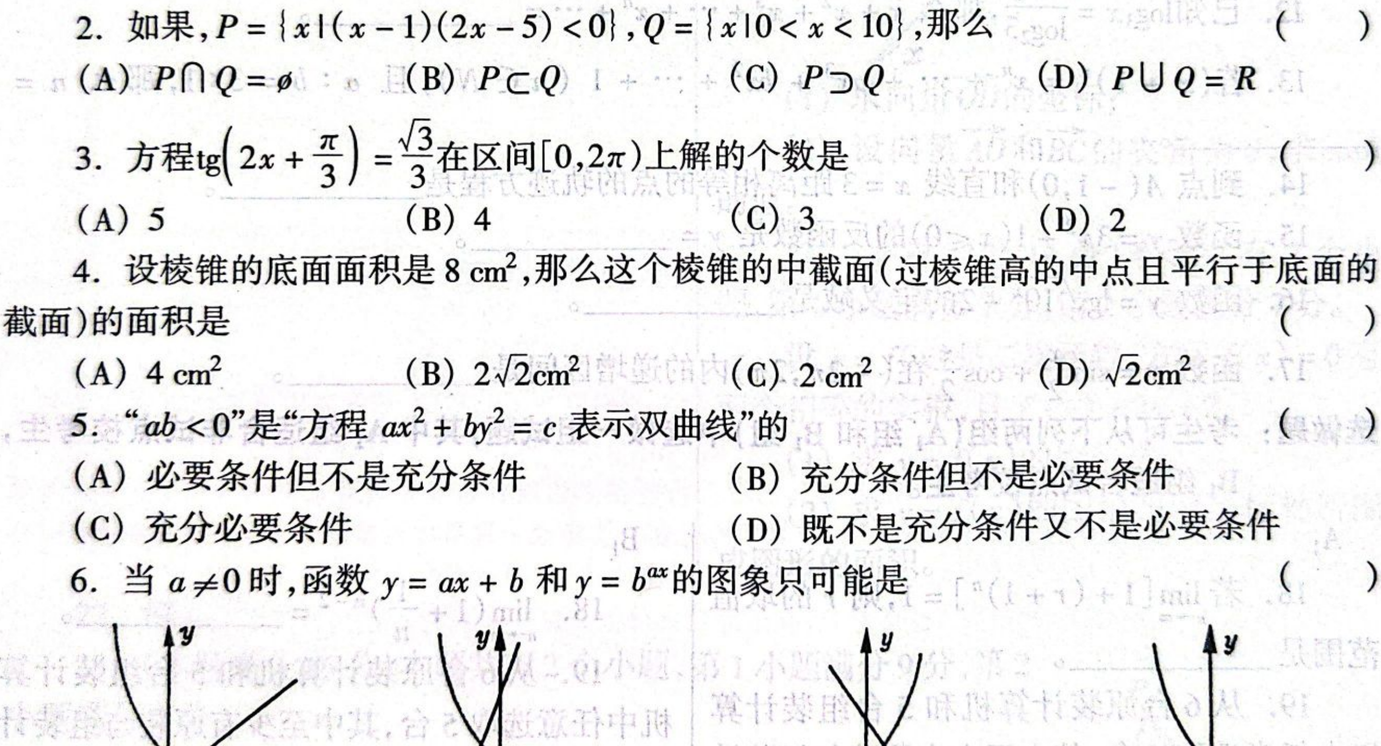
(A) 4 cm^2　　(B) $2\sqrt{2}cm^2$　　(C) 2 cm^2　　(D) $\sqrt{2}cm^2$

5. "$ab<0$"是"方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线"的　　(　　)

(A) 必要条件但不是充分条件　　(B) 充分条件但不是必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不是充分条件又不是必要条件

6. 当 $a\neq 0$ 时,函数 $y=ax+b$ 和 $y=b^{ax}$ 的图象只可能是　　(　　)



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

7. 当 $0<a<b<1$ 时,下列不等式中正确的是　　(　　)

(A) $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^{b}$　　(B) $(1+a)^{a}>(1+b)^{b}$

(C) $(1-a)^{b}>(1-a)^{\frac{b}{2}}$　　(D) $(1-a)^{a}>(1-b)^{b}$

8. 下列四个命题中的真命题是　　(　　)

(A) 经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线都可以用方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 表示

(B) 经过任意两个不同的点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 的直线都可以用方程 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$ 表示

(C) 不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 表示

(D) 经过定点 $A(0,b)$ 的直线都可以用方程 $y=kx+b$ 表示

二、填空题(本大题满分 48 分)本大题共有 12 题,只要求直接填写结果,每个空格填对得 4 分,否则一律得零分。

9. 不等式 $\frac{2x-1}{x+3}>1$ 的解是__________。

10. 双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{8y^2}{9}=8$ 的渐近线方程是__________。

11. 1992 年底世界人口达到 54.8 亿,若人口的年平均增长率为 $x\%$,2000 年底世界人口数为 y(亿),那么 y 与 x 的函数关系式是__________。

12. 已知 $\log_3 x=\frac{-1}{\log_2 3}$,那么 $x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=$__________。

13. 若 $(x+1)^n=x^n+\cdots+ax^3+bx^2+\cdots+1\ (n\in N)$,且 $a:b=3:1$,那么 $n=$__________。

14. 到点 $A(-1,0)$ 和直线 $x=3$ 距离相等的点的轨迹方程是__________。

15. 函数 $y=3x^2+1(x\leqslant 0)$ 的反函数是 $y=$__________。

16. 函数 $y=\lg\sqrt{10^x-2}$ 的定义域是__________。

17. 函数 $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ 在 $(-2\pi,2\pi)$ 内的递增区间是__________。

选做题:考生可从下列两组(A_1 组和 B_1 组)中选做一组试题,其中 A_1 组适合非试点校考生,B_1 组适合试点校考生。

A_1

18. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}[1+(r+1)^n]=1$,则 r 的取值范围是__________。

19. 从 6 台原装计算机和 5 台组装计算机中任意选取 5 台,其中至少有原装与组装计算机各 2 台,则不同的选取法有__________种。(结果用数值表示)

20. 把圆心角为 216°,半径为 5 分米的扇形铁皮焊成一个圆锥形容器(不计焊缝),那么容器的容积是______立方分米。(结果保留两位小数)

B_1

18. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n-2}=$__________。

19. 从 6 台原装计算机和 5 台组装计算机中任意选取 5 台,其中至少有原装与组装计算机各 2 台的概率是_____。

20. 某工程由下列工序组成:

工　序	a	b	c	d	e
紧前工序	—	a	a	b	c,d
工时数(天)	2	3	5	6	3

那么工程总时数是__________天。

三、解答题(本大题满分 78 分)本大题共有 5 题,解下列各题必须写出必要的步骤。

选做题:考生可从下列两组(A_2 组和 B_2 组)中选做一组试题,其中 A_2 组适合非试点校考生,B_2 组适合试点校考生。

A_2

21.(本题满分 12 分)

已知$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\theta)=3$,

求$\sin 2\theta-2\cos^2\theta$ 的值。

22.(本题满分 14 分)

已知复数 z_1、z_2 满足$|z_1|=|z_2|=1$,

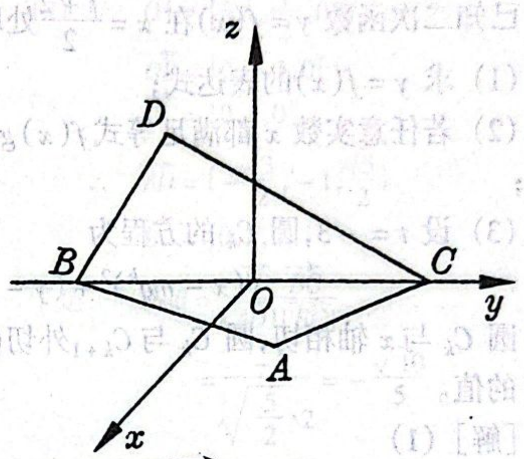
且 $z_1+z_2=i$

求 z_1、z_2 的值。

B_2

21.(本题满分 12 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 4 分,第 2 小题满分 8 分。

如图,在空间直角坐标系中,$BC=2$,原点 O 是 BC 的中点,点 A 的坐标是$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,点 D 在平面 yoz 上,且$\angle BDC=90^\circ$,$\angle DCB=30^\circ$。



(1) 求向量$\overrightarrow{OD}$的坐标;

(2) 设向量$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{BC}$的夹角为 θ,求$\cos\theta$ 的值。

22.(本题满分 14 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 7 分,第 2 小题满分 7 分。

设 $y=f(x)$是二次函数,方程 $f(x)=0$ 有两个相等的实根,且 $f'(x)=2x+2$

(1) 求 $y=f(x)$的表达式;

(2) 求 $y=f(x)$的图象与两坐标轴所围成图形的面积。

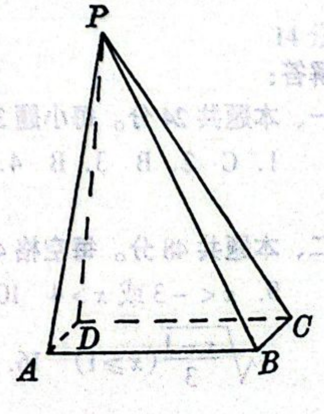
22. 解

23.(本题满分 16 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 9 分,第 2 小题满分 7 分。

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面是一个矩形,$AB=3$,$AD=1$,又 $PA\perp AB$,$PA=4$,$\angle PAD=60^\circ$。

(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;

(2) 求二面角 $P-BC-D$ 的大小(用反三角函数表示)。



[解] (1)

(2)

24. (本题满分 18 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 6 分,第 2 小题满分 12 分。

设椭圆的方程为$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m,n>0)$,过原点且倾角为 θ 和 $\pi-\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 的两条直线分别交椭圆于 A、C 和 B、D 四点。

(1) 用 θ、m、n 表示四边形 $ABCD$ 的面积 S;

(2) 若 m、n 为定值,当 θ 在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$上变化时,求 S 的最大值 u

[解] (1)

(2)

25. (本题满分 18 分)本题共有 3 个小题,第 1 小题满分 4 分,第 2 小题满分 6 分,第 3 小题满分 8 分。

已知二次函数 $y=f(x)$在 $x=\frac{t+2}{2}$处取得最小值 $-\frac{t^2}{4}(t\neq0)$,$f(1)=0$

(1) 求 $y=f(x)$的表达式;

(2) 若任意实数 x 都满足等式$f(x)g(x)+mx+n=x^3$($g(x)$为多项式),试用 t 表示 m 和 n;

(3) 设 $t=-3$,圆 C_k 的方程为

$$(x-mq^k)^2+(y-nq^k)^2={r_k}^2(0<q<1,r_k>0)$$

圆 C_k 与 x 轴相切,圆 C_k 与 C_{k+1}外切($k=0,1,2,\cdots$),记 S 为所有这些圆的面积之和,求 q、S 的值。

[解] (1)

(2)

(3)

数学试卷答案及评分标准

说明:

1. 本解答列出试题的一种或几种解法,如果考生的解法与所列解法不同,可参照本解答中评分标准的精神进行评分。

2. 评阅试卷,应坚持每题评阅到底,不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅,当考生的解答在某一步出现错误,影响了后继部分,但该步以后的解答未改变这一道题的内容和难度时,可视影响程度决定后面部分的给分,这时原则上不应超过后面部分应给分数之半,如果有较严重的概念性错误,就不给分。

3. 第 21 题至第 25 题中右端所注的分数,表示考生正确做到这一步应得的该题的累加分数。

4. 给分或扣分均以 1 分为单位。

解答:

一、本题共 24 分。每小题 3 分。

1. C 2. B 3. B 4. C 5. A 6. A 7. D 8. B

二、本题共 48 分。每空格 4 分。

9. $x<-3$或$x>4$ 10. $3x\pm4y=0$ 11. $y=54.8(1+x\%)^8$ 12. 1 13. 11 14. $y^2=-8x+8$ 15. $-\sqrt{\frac{x-1}{3}}(x\geqslant1)$ 16. $(\lg2,+\infty)$ 17. $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 18. A_1: $-2<r<0$ B_1: e 19. A_1: 350 B_1:

$\frac{25}{33}$(或 0.76)　20. A_1：37.70(或 37.68 或 37.69)　B_1：14

三、本题共 78 分。

A_2

21.（12分）

解：∵　$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=3$，

∴　$\frac{1+\mathrm{tg}\theta}{1-\mathrm{tg}\theta}=3$，

解得　$\mathrm{tg}\theta=\frac{1}{2}$　　4分

于是　$\sin 2\theta-2\cos^2\theta$

$=\sin 2\theta-\cos 2\theta-1$

$=\frac{2\,\mathrm{tg}\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}-\frac{1-\mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}-1$　　10分

$=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}-1$

$=-\frac{4}{5}$　　12分

22.（14分）

解：

由　$z_1+z_2=i$ 是纯虚数，

且 $|z_1|=|z_2|=1$

可设　$z_1=a+bi$

$z_2=-a+bi(a、b\in R)$　　5分

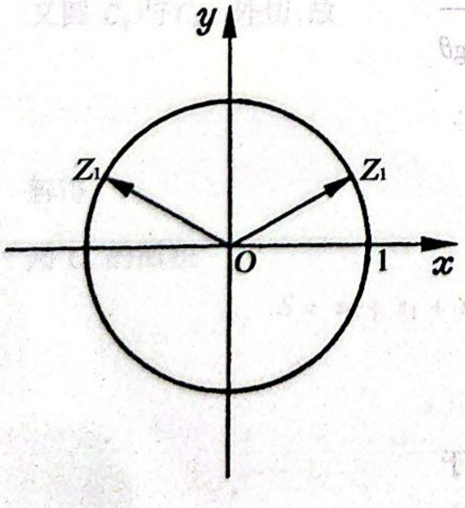
且　$a^2+b^2=1$

于是由　$(a+bi)+(-a+bi)=i$

可得　$b=\frac{1}{2}$　$a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　10分

∴　$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$　$z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

或　$z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$　$z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$　　14分



B_2

21.（12分）

解：

(1) ∵　$z_D=|BC|\cos 30^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_D=1-|BC|\cos 30^\circ\cos 30^\circ=-\frac{1}{2}$

∴　$\overrightarrow{OD}=\left\{0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$　　4分

(2) ∵　$\overrightarrow{OA}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right\}$

$\overrightarrow{OB}=\{0,-1,0\}$

$\overrightarrow{OC}=\{0,1,0\}$

∴　$\overrightarrow{AD}=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$\overrightarrow{BC}=\{0,2,0\}$　　8分

于是　$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}$

$=\frac{-2}{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot 2}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$　　12分

22.（14分）

解：

(1) 设　$f(x)=ax^2+bx+c$，

则　$f'(x)=2ax+b$

又已知　$f'(x)=2x+2$，故 $a=1,b=2$　　4分

∴　$f(x)=x^2+2x+c$

∵　方程 $f(x)=0$ 有两个相等实根，

∴　判别式 $\Delta=4-4c=0, c=1$

∴　$f(x)=x^2+2x+1$　　7分

(2) 所求面积

$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx$　　11分

$=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)\Big|_{-1}^{0}$

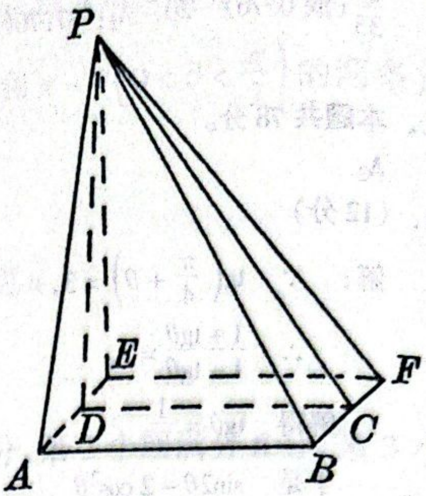
$=\frac{1}{3}$　　14分

23.（16分）第 1 小题 9 分，第 2 小题 7 分。

解：(1) ∵　$AB\perp AD, AB\perp AP$，

∴　$AB\perp$ 平面 PAD

又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$， $\therefore$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD 4分



在平面 PAD 中，作 $PE\perp AD$（$AD=$ 平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD$），

交 AD 的延长线于点 E（因为 $AE=AP\cos60°=2>AD$），

$\therefore$ $PE\perp$ 平面 $ABCD$ 7分

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAE$ 中，$PE=AP\sin60°=2\sqrt{3}$

$\therefore$ $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}AB\cdot AD\cdot PE=2\sqrt{3}$ 9分

(2) 在平面 $ABCD$ 中，作 $EF\parallel DC$，交 BC 的延长线于点 F，则

$EF\perp BF$，连结 PF

$\because$ $PE\perp$ 平面 $ABCD$，$EF\perp BF$，

$\therefore$ $PF\perp BF$（三垂线定理）

于是 $\angle PFE$ 是二面角 $P—BC—D$ 的平面角 13分

在 $\mathrm{Rt}\triangle PEF$ 中，$\mathrm{tg}\angle PFE=\dfrac{PE}{EF}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

$$\therefore \quad \angle PFE=\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

因此，二面角 $P—BC—D$ 的大小为 $\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 16分

24.（18分）。第1小题6分。第2小题12分。

解：

(1) 设经过原点且倾角为 θ 的直线方程为 $y=x\,\mathrm{tg}\theta$ 解方程组

$$\begin{cases} y=x\,\mathrm{tg}\theta, \\ \dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1, \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} x^2=\dfrac{m^2n^2}{n^2+m^2\,\mathrm{tg}^2\theta}, \\ y^2=\dfrac{m^2n^2\,\mathrm{tg}^2\theta}{n^2+m^2\,\mathrm{tg}^2\theta} \end{cases}$$
3分

由对称性，得四边形 $ABCD$ 为矩形，又由于 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以四边形 $ABCD$ 的面积

$$S=4|xy|=\frac{4m^2n^2\,\mathrm{tg}\theta}{n^2+m^2\,\mathrm{tg}\theta}$$ 6分

(2)
$$S=\frac{4m^2n^2}{\dfrac{n^2}{\mathrm{tg}\theta}+m^2\,\mathrm{tg}\theta}$$

(i) 当 $m>n$，即 $\dfrac{n}{m}<1$ 时，

$\because$ $\dfrac{n^2}{\mathrm{tg}\theta}+m^2\,\mathrm{tg}\theta\geqslant 2mn$，当且仅当 $\mathrm{tg}^2\theta=\dfrac{n^2}{m^2}$ 时等号成立，

$\therefore$ $S=\dfrac{4m^2n^2}{\dfrac{n^2}{\mathrm{tg}\theta}+m^2\,\mathrm{tg}\theta}\leqslant\dfrac{4m^2n^2}{2mn}=2mn$

由于 $0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，$0<\mathrm{tg}\theta\leqslant1$，故取 $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{n}{m}$，得 $u=2mn$ 9分

(ii) 当 $m<n$，即 $\dfrac{n}{m}>1$ 时，对于任意 $0<\theta_1<\theta_2\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，由于

$$\left(m^2\,\mathrm{tg}\theta_2+\frac{n^2}{\mathrm{tg}\theta_2}\right)-\left(m^2\,\mathrm{tg}\theta_1+\frac{n^2}{\mathrm{tg}\theta_1}\right)=m^2(\mathrm{tg}\theta_2-\mathrm{tg}\theta_1)-n^2\frac{\mathrm{tg}\theta_2-\mathrm{tg}\theta_1}{\mathrm{tg}\theta_1\,\mathrm{tg}\theta_2}$$

$$=(\mathrm{tg}\theta_2-\mathrm{tg}\theta_1)\frac{m^2\,\mathrm{tg}\theta_1\,\mathrm{tg}\theta_2-n^2}{\mathrm{tg}\theta_1\,\mathrm{tg}\theta_2}$$

$\because \quad 0 < \text{tg}\theta_1 < \text{tg}\theta_2 \leqslant 1, m^2\,\text{tg}\theta_1\,\text{tg}\theta_2 - n^2 < m^2 - n^2 < 0$

$\therefore \quad \left(m^2\,\text{tg}\theta_2 + \dfrac{n^2}{\text{tg}\theta_2}\right) - \left(m^2\,\text{tg}\theta_1 + \dfrac{n^2}{\text{tg}\theta_1}\right) < 0$ 14分

$$\frac{4m^2n^2}{m^2\,\text{tg}\theta_2 + \dfrac{n^2}{\text{tg}\theta_2}} - \frac{4m^2n^2}{m^2\,\text{tg}\theta_1 + \dfrac{n^2}{\text{tg}\theta_1}} > 0$$

于是,在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上 $S = \dfrac{4m^2n^2}{\dfrac{n^2}{\text{tg}\theta} + m^2\,\text{tg}\theta}$是$\theta$的递增函数,故取$\theta = \dfrac{\pi}{4}$,$\text{tg}\theta = 1$

得 $u = \dfrac{4m^2n^2}{m^2 + n^2}$

$\therefore \quad u = \begin{cases} 2mn, & 0 < n < m \\ \dfrac{4m^2n^2}{m^2+n^2}, & 0 < m < n \end{cases}$ 18分

25.(18分)第1小题4分。第2小题6分。第3小题8分。

解:(1) 设$f(x) = a\left(x - \dfrac{t+2}{2}\right)^2 - \dfrac{t^2}{4}$

$\because \quad f(1) = 0, \quad \therefore \quad a\left(1 - \dfrac{t+2}{2}\right)^2 - \dfrac{t^2}{4} = 0$,得 $a = 1$

于是 $f(x) = x^2 - (t+2)x + t + 1$ 4分

(2) $f(x) = (x-1)[x-(t+1)]$,代入已知等式,得

$(x-1)[x-(t+1)]g(x) + mx + n = x^3$

将 $x = 1, x = t+1$ 分别代入上式,得

$\begin{cases} m + n = 1 \\ (t+1)m + n = (t+1)^3 \end{cases}$ 7分

由 $t \neq 0$,可解得 $m = t^2 + 3t + 3, n = -t^2 - 3t - 2$ 10分

(3) 当 $t = -3$ 时,$m = 3, n = -2$

圆 C_k 的方程为$(x - 3q^k)^2 + (y + 2q^k)^2 = {r_k}^2$

$\because$ 圆 C_k 与x轴相切, $\therefore \quad r_k = 2q^k$ 12分

圆 C_k 的圆心 $O_k(3q^k, -2q^k)$,

$$|O_kO_{k+1}|^2 = (3q^{k+1} - 3q^k)^2 + (2q^{k+1} - 2q^k)^2 = 13q^{2k}(q-1)^2$$

$\because \quad 0 < q < 1, \quad \therefore \quad |O_kO_{k+1}| = \sqrt{13}q^k(1-q)$ 14分

又圆 C_k 与 C_{k+1}外切,故

$$r_k + r_{k+1} = |O_kO_{k+1}|$$

$$\therefore \quad 2q^k + 2q^{k+1} = \sqrt{13}q^k(1-q)$$

解得 $q = \dfrac{\sqrt{13}-2}{\sqrt{13}+2}$ 16分

圆 C_k 的面积 $S_k = \pi {r_k}^2 = 4\pi q^{2k}$

$\therefore \quad S = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots\cdots + s_k + \cdots = 4\pi(1 + q^2 + q^4 + \cdots\cdots)$

$= \dfrac{4\pi}{1-q^2} = \pi\left(2 + \dfrac{17}{26}\sqrt{13}\right)$ 18分