1996年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷(理工农医类)

考生注意:

本试卷共有24道试题,满分150分。试卷中的选做题按 A_1 组、A_2 组与 B_1 组、B_2 组排列,A_1 组对应 B_1 组,A_2 组对应 B_2 组。考生从对应的两组中可以且只可以选做一组,若同时做了对应的两组试题,或分别做了对应的两组中的部分试题,则只对考生在A组中所完成的部分进行评分和计分。

一、选择题(本大题满分24分)本大题共有8题,每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论,其中有且只有一个结论是正确的,必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内,选对得3分,不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内),一律得零分。

1. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$、$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$,那么集合 $M\cap N$ 为 (　　)

(A) $x=3, y=-1$　　(B) $(3,-1)$

(C) $\{3,-1\}$　　(D) $\{(3,-1)\}$

2. 在下列各区间中,函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间是 (　　)

(A) $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$　　(B) $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$　　(C) $[-\pi,0]$　　(D) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$

3. 如果 $\log_a 3>\log_b 3>0$,那么 a、b 间的关系是 (　　)

(A) $0<a<b<1$　　(B) $1<a<b$

(C) $0<b<a<1$　　(D) $1<b<a$

4. 在下列命题中,真命题是 (　　)

(A) 若直线 m、n 都平行于平面 α,则 $m/\!/n$

(B) 设 α—l—β 是直二面角,若直线 $m\perp l$,则 $m\perp\beta$

(C) 若直线 m、n 在平面 α 内的射影依次是一个点和一条直线,且 $m\perp n$,则 n 在 α 内或 n 与 α 平行

(D) 设 m、n 是异面直线,若 m 与平面 α 平行,则 n 与 α 相交

5. 将椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 绕其左焦点按逆时针方向旋转90°后所得的椭圆方程是 (　　)

(A) $\dfrac{(x+4)^2}{25}+\dfrac{(y-4)^2}{9}=1$　　(B) $\dfrac{(x+4)^2}{25}+\dfrac{(y+4)^2}{9}=1$

(C) $\dfrac{(x+4)^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1$　　(D) $\dfrac{(x+4)^2}{9}+\dfrac{(y+4)^2}{25}=1$

6. 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 的定义域和值域都为 R,则 $f(x)>g(x)(x\in R)$ 成立的充要条件是 (　　)

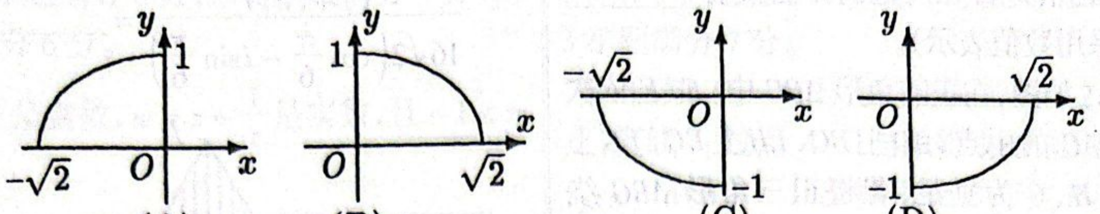
(A) 有一个 $x\in R$,使得 $f(x)>g(x)$

(B) 有无穷多个 $x\in R$,使得 $f(x)>g(x)$

(C) 对 R 中任意的 x，都有 $f(x)>g(x)+1$

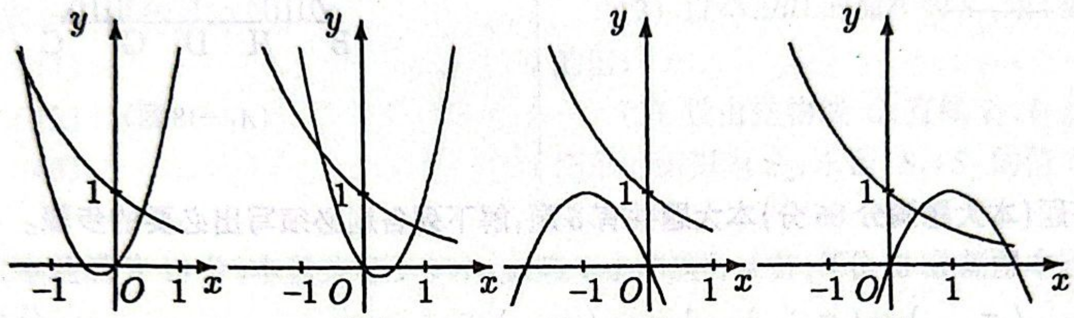
(D) R 中不存在 x，使得 $f(x)\leqslant g(x)$

7. 若 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则椭圆 $x^2+2y^2-2\sqrt{2}x\cos\theta+4y\sin\theta=0$ 的中心的轨迹是 （　　）



(A)　(B)　(C)　(D)

8. 在下列图象中，二次函数 $y=ax^2+bx$ 与指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ 的图象只可能是 （　　）



(A)　(B)　(C)　(D)

二、填空题（本大题满分 40 分）本大题共有 10 题，只要求直接填写结果，每个空格填对得 4 分，否则一律得零分。

9. 方程 $\log_2(9^x-5)=\log_2(3^x-2)+2$ 的解是 $x=$__________。

10. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$ 的定义域是__________。

11. 方程 $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上的解是 $x=$__________。

12. 函数 $y=x^{-2}(x<0)$ 的反函数是 $y=$__________。

13. 极坐标方程分别是 $\rho=\cos\theta$ 和 $\rho=\sin\theta$ 的两个圆的圆心距是__________。

14. 在 $(1+x)^6(1-x)^4$ 的展开式中，x^3 的系数是__________（结果用数值表示）。

选做题：考生可从下列两组（A_1 组和 B_1 组）中选做一组试题，其中 A_1 组适合非试点学校考生，B_1 组适合试点学校考生。

A_1

15. 已知 $O(0,0)$ 和 $A(6,3)$ 两点，若点 P 在直线 OA 上，且 $\frac{OP}{PA}=\frac{1}{2}$，又 P 是线段 OB 的中点，则点 B 的坐标是__________。

16. 平移坐标轴将抛物线 $4x^2-8x+y+5=0$ 化为标准方程 $x'^2=ay'(a\neq0)$，则新坐标系的原点在原坐标系中的坐标是____________________。

B_1

15. 已知 $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{i}-8\vec{j}$，$\vec{a}-\vec{b}=-8\vec{i}+16\vec{j}$。那么 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________。

16. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=$__________。

17. 有 8 本互不相同的书，其中数学书 3 本，外文书 2 本，其它书 3 本。若将这些书随机地排成一列放在书架上，则数学书恰好排在

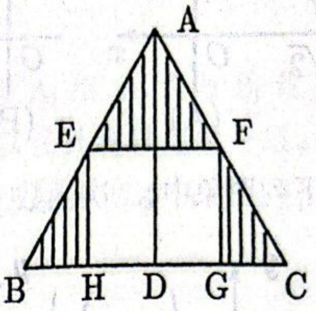
17. 有 8 本互不相同的书，其中数学书 3 本，外文书 2 本，其它书 3 本。若将这些书排成一列放在书架上，则数学书恰好排在一起，外文书也恰好排在一起的排法共有________种(结果用数值表示)。

18. 如图，在正三角形 ABC 中，E、F 依次是 AB、AC 的中点，$AD \perp BC$，$EH \perp BC$，$FG \perp BC$，D、H、G 为垂足，若将正三角形 ABC 绕 AD 旋转一周所得的圆锥的体积为 V，则其中由阴影部分所产生的旋转体的体积与 V 的比值是________。

一起，外文书也恰好排在一起的概率为________(结果用分数表示)。

18. 若 i 是虚数单位，计算：

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^5}{16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)}=\_\_\_\_\_\_\_\_。$$



(A_1—18 题)

三、解答题(本大题满分 86 分)本大题共有 6 题，解下列各题必须写出必要的步骤。

19. (本题满分 10 分)

已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{6}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin 4\alpha$ 的值。

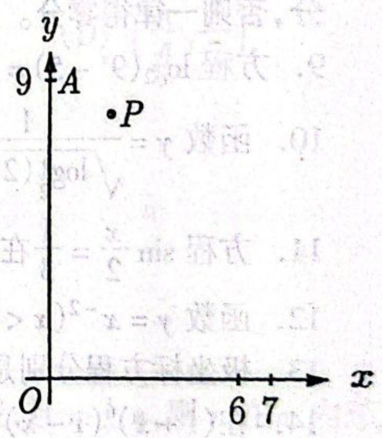
[解]

20. (本题满分 10 分)本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 4 分。

在如图所示的直角坐标系中，一运动物体经过点 $A(0,9)$，其轨迹方程为 $y=ax^2+c(a<0)$，$D=(6,7)$ 为 x 轴上的给定区间。

(1) 为使物体落在 D 内，求 a 的取值范围；

(2) 若物体运动时又经过点 $P(2,8.1)$，问它能否落在 D 内？并说明理由。



[解] (1)

(2)

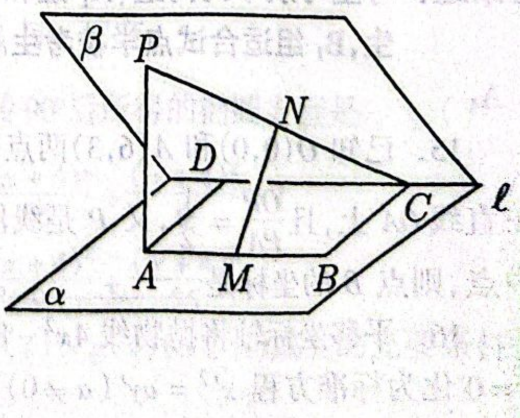
21. (本题满分 14 分)本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 5 分。

如图，在二面角 $\alpha—l—\beta$ 中，A、$B\in\alpha$，C、$D\in l$，$ABCD$ 为矩形。$P\in\beta$，$PA\perp\alpha$，且 $PA=AD$。M、N 依次是 AB、PC 的中点。

(1) 求二面角 $\alpha—l—\beta$ 的大小；

(2) 求证：$MN\perp AB$；

(3) 求异面直线 PA 与 MN 所成角的大小。



[解] (1)

(2)

(3)

选做题：考生可从下列两组(A_2 组和 B_2 组)中选做一组试题，其中 A_2 组适合非试点学校考

生，B_2 组适合试点校考生。

A_2

22. (本题满分 16 分)本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 6 分。

设 z 是虚数，$w=z+\dfrac{1}{z}$ 是实数，且 $-1<w<2$。

(1) 求 $|z|$ 的值及 z 的实部的取值范围；

(2) 设 $u=\dfrac{1-z}{1+z}$。求证：u 为纯虚数；

(3) 求 $w-u^2$ 的最小值。

[解] (1)

(2)

(3)

B_2

22. (本题满分 16 分)本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 7 分。

已知 $A(-1,2)$ 为抛物线 $C: y=2x^2$ 上的点，直线 l_1 过点 A，且与抛物线 C 相切。直线 $l_2: x=a(a\neq -1)$ 交抛物线 C 于点 B，交直线 l_1 于点 D。

(1) 求直线 l_1 的方程；

(2) 设 $\triangle ABD$ 的面积为 S_1，求 $|BD|$ 及 S_1 的值；

(3) 设由抛物线 C、直线 l_1、l_2 所围成的图形的面积为 S_2，求证：$S_1:S_2$ 的值为与 a 无关的常数。

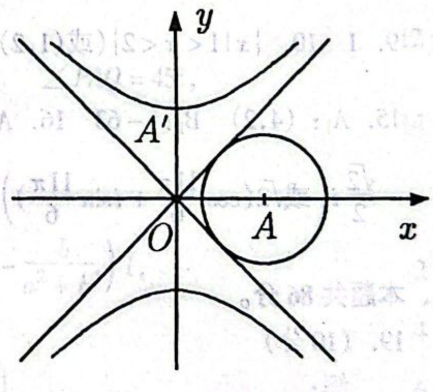
23. (本题满分 18 分)本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 10 分。

已知双曲线 S 的两条渐近线过坐标原点，且与以点 $A(\sqrt{2},0)$ 为圆心、1 为半径的圆相切，双曲线 S 的一个顶点 A' 与点 A 关于直线 $y=x$ 对称。设直线 l 过点 A，斜率为 k。

(1) 求双曲线 S 的方程；

(2) 当 $k=1$ 时，在双曲线 S 的上支上求点 B，使其与直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$；

(3) 当 $0\leqslant k<1$ 时，若双曲线 S 的上支上有且只有一个点 B 到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$，求斜率 k 的值及相应的点 B 的坐标。



[解] (1)

(2)

(3)

24. (本题满分 18 分)本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 7 分。

设 A_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和，$A_n=\dfrac{3}{2}(a_n-1)(n\in N)$。数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=4n+3(n\in N)$。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $d\in\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}\cap\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n,\cdots\}$，则称 d 为数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项。将数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项，按它们的原数列中的先后顺序排成一个新的数列 $\{d_n\}$，证明数列 $\{d_n\}$ 的通项公式为 $d_n=3^{2n+1}(n\in N)$；

(3) 设数列 $\{d_n\}$ 中的第 n 项是数列 $\{b_n\}$ 中的第 r 项，B_r 为数列 $\{b_n\}$ 前 r 项的和，D_n 为数

列$\{d_n\}$前 n 项的和，$T_n = B_r - D_n$. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{(a_n)^4}$

[解] (1)

(2)

(3)

数学试卷答案及评分标准

说明:

1. 本解答列出试题的一种或几种解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照本解答中评分标准的精神进行评分。

2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅，当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一道题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分。

3. 第 19 题至第 24 题中右端所注的分数，表示考生正确做到这一步应得的该题的累加分数。

4. 给分或扣分均以 1 分为单位。

一、本题共 24 分。每小题 3 分。

1. D 2. B 3. B 4. C 5. C 6. D 7. D 8. A

二、本题共 40 分。每空格 4 分。

9. 1 10. $\{x|1<x<2\}$(或$(1,2)$) 11. $2\pi - 2\arcsin\frac{1}{3}$ 12. $y=-\sqrt{\frac{1}{x}}\,(x>0)$ 13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 14. -8

15. A_1: $(4,2)$ B_1: -63 16. A_1: $(1,-1)$ B_1: $-\frac{1}{4}$ 17. A_1: 1440 B_1: $\frac{1}{28}$ 18. A_1: $\frac{5}{8}$ B_1: $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\left(\text{或}\sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})\right)$

三、本题共 86 分。

19. (10分)

解:

由 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$ 2分

$= \sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right) = \frac{1}{2}\cos2\alpha = \frac{1}{6}$ 5分

得 $\cos2\alpha = \frac{1}{3}$，又 $2\alpha\in(\pi,2\pi)$，得 $\sin2\alpha = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 8分

故 $\sin4\alpha = 2\sin2\alpha\cos2\alpha = 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)\cdot\frac{1}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ 10分

20. (10分)。第 1 小题 6 分。第 2 小题 4 分。

解:

(1) 由点 A 的坐标为$(0,9)$，得 $c=9$，即轨迹方程为 $y=ax^2+9$ 2分

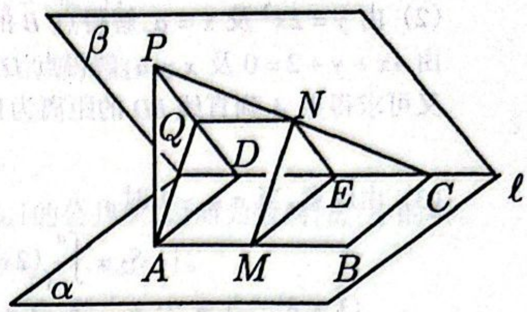
令 $y=0$，得 $ax^2+9=0$，$x^2=-\frac{9}{a}$

由题意 $6<\sqrt{-\frac{9}{a}}<7$,解得 $-\frac{1}{4}<a<-\frac{9}{49}$ 6分

(2) 若物体又经过点 $P(2,8.1)$,则 $8.1=4a+9$,解得 $a=-\frac{9}{40}$ 8分

$\because\ -\frac{1}{4}<-\frac{9}{40}<-\frac{9}{49}$, $\therefore$ 物体能落在 D 内。 10分

21. (14分)第1小题4分。第2,3小题各5分。



解:

(1) 连接 PD $\because$ $PA\perp\alpha, AD\perp l$, $\therefore$ $PD\perp l$

$\therefore$ $\angle PDA$ 是二面角 $\alpha—l—\beta$ 的平面角。 2分

在 $Rt\triangle PAD$ 中, $\because$ $PA=AD$,

$\therefore$ $\angle PDA=45°$,

即二面角 $\alpha—l—\beta$ 的大小为 $45°$ 4分

(2) 设 E 是 DC 的中点,连结 ME、NE

$\because$ M、N、E 依次是 AB、PC、DC 的中点,

$\therefore$ $ME\,/\!/\,AD$, $NE\,/\!/\,PD$ $\therefore$ $ME\perp l$, $NE\perp l$

因而 $l\perp$ 平面 MNE 7分

$\because AB\,/\!/\,l$, $\therefore$ $AB\perp$ 平面 MNE

$\because MN\subset$ 平面 MNE, $\therefore MN\perp AB$ 9分

(3) 设 Q 是 DP 的中点,连结 NQ、AQ,得 $NQ\,/\!/\,DC$,且 $NQ=\frac{1}{2}DC$

$\because$ $AM\,/\!/\,DC$,且 $AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}DC$ $\therefore$ $QN\,/\!/\,AM$, $QN=AM$

得 $QNMA$ 为平行四边形, $\therefore$ $AQ\,/\!/\,MN$

于是 $\angle PAQ$ 是异面直线 PA 与 MN 所成的角 12分

$\because$ $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形,AQ 为斜边上的中线, $\therefore$ $\angle PAQ=45°$,

即 PA 与 MN 所成角的大小为 $45°$ 14分

22. (16分)第1、3小题各6分。第2小题4分。

(A_2)(1) 解:设 $z=a+bi, a、b\in R, b\neq 0$

$$w=a+bi+\frac{1}{a+bi}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i,$$ 2分

$\because$ w 是实数,$b\neq 0$ $\therefore$ $a^2+b^2=1$,即 $|z|=1$ 4分

$w=2a$ $\because -1<w<2$ $\therefore$ z 的实部的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ 6分

(2) 证:$u=\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-a-bi}{1+a+bi}=\frac{(1-a-bi)(1+a-bi)}{(1+a+bi)(1+a-bi)}$

$=\frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}=-\frac{b}{a+1}i$ 9分

$\because$ $a\in(-\frac{1}{2},1), b\neq 0$, $\therefore$ u 为纯虚数 10分

(3) 解:

$$w-u^2=2a+\frac{b^2}{(a+1)^2}=2a+\frac{1-a^2}{(a+1)^2}$$ 12分

$$=2a-\frac{a-1}{a+1}=2a-1+\frac{2}{a+1}$$

$$=2\left[(a+1)+\frac{1}{(a+1)}\right]-3$$ 14分

$\because$ $a\in(-\frac{1}{2},1)$, $\therefore$ $a+1>0$, $\therefore$ $w-u^2\geqslant 2\times 2-3=1$ 15分

当 $a+1=\frac{1}{a+1}$,即 $a=0$ 时,上式取等号, 16分

$\therefore$ $w-u^2$ 的最小值是 1

22. (16 分)第 1 小题 4 分。第 2 小题 5 分。第 3 小题 7 分。

(B_2)解:

(1) 由 $y=2x^2$, 得 $y'=4x$ 当 $x=-1$ 时, $y'=-4$

$\therefore$ l_1 的方程为 $y-2=-4(x+1)$, 即 $4x+y+2=0$ 4 分

(2) 由 $y=2x^2$ 及 $x=a$, 解得点 B 的坐标为 $(a,2a^2)$

由 $4x+y+2=0$ 及 $x=a$, 解得点 D 的坐标为 $(a,-4a-2)$ 6 分

又可求得点 A 到直线 BD 的距离为 $|a+1|$, $|BD|=2a^2+4a+2=2(a+1)^2$

$\therefore$ $S_1=|a+1|^3$ 9 分

(3) 由题意, 当 $a>-1$ 时,

$$S_2=\int_{-1}^{a}(2x^2+4x+2)\,dx=\left(\frac{2}{3}x^3+2x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{a}$$

$$=\frac{2}{3}a^3+2a^2+2a+\frac{2}{3}-2+2=\frac{2}{3}(a+1)^3$$ 13 分

当 $a<-1$ 时, $S_2=\int_{a}^{-1}(2x^2+4x+2)\,dx=-\frac{2}{3}(a+1)^3$ 15 分

$\therefore$ $S_1:S_2=\frac{3}{2}$, 即 $S_1:S_2$ 的值为与 a 无关的常数。 16 分

说明: 若计算正确, 但未对 a 作讨论, 扣 2 分。

23. (18 分)第 1、2 小题各 4 分。第 3 小题 10 分。

解:

(1) 由已知得双曲线的渐近线为 $y=\pm x$, 因而 S 为等轴双曲线。 2 分

因为其一个顶点为 $A'(0,\sqrt{2})$,

所以双曲线 S 的方程为 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$ 4 分

(2) 若 $B(x,\sqrt{x^2+2})$ 是双曲线 S 的上支上到直线 $l: y=x-\sqrt{2}$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点, 则

$$\frac{|x-\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$ 6 分

解得 $x=\sqrt{2}, y=2$。 $\therefore$ 点 B 的坐标是 $(\sqrt{2},2)$ 8 分

(3) $\because$ 当 $0\leqslant k<1$ 时, 双曲线 S 的上支在直线 l 的上方。 $\therefore$ 点 B 在直线 l 的上方. 设直线 l' 与直线 $l: y=k(x-\sqrt{2})$ 平行, 两线间的距离为 $\sqrt{2}$, 且直线 l' 在直线 l 的上方。双曲线 S 的上支上有且只有一个点 B 到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$, 等价于直线 l' 与双曲线 S 的上支有且只有一个公共点。 10 分

设 l' 的方程是 $y=kx+m$ 由 l 上的点 A 到 l' 的距离为 $\sqrt{2}$ 可知:

$\frac{|\sqrt{2}k+m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$ 解得 $m=\sqrt{2}(\pm\sqrt{k^2+1}-k)$

$\because$ 直线 l' 在直线 l 的上方, $\therefore$ $m=\sqrt{2}(\sqrt{k^2+1}-k)$

由方程 $y^2-x^2=2$ 及 $y=kx+m$, 消去 y, 得

$$(k^2-1)x^2+2mkx+m^2-2=0$$ 12 分

$\because$ $k^2\neq 1$, $\therefore \Delta=4(m^2-2+2k^2)=8k(3k-2\sqrt{k^2+1})$ 14 分

令 $\Delta=0$, $\because$ $0\leqslant k<1$, 解得 $k=0, k=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

当 $k=0$ 时, $m=\sqrt{2}$, 解得 $x=0, y=\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(0,\sqrt{2})$ 16 分

当 $k=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, $m=\frac{\sqrt{10}}{5}$, 解得 $x=2\sqrt{2}, y=\sqrt{10}$,

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(2\sqrt{2},\sqrt{10})$ 18分

24. (18分)第1小题5分。第2小题6分。第3小题7分。

解:

(1) 由已知 $A_n=\frac{3}{2}(a_n-1)(n\in N)$,当 $n=1$ 时,$a_1=\frac{3}{2}(a_1-1)$,解得 $a_1=3$。

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=A_n-A_{n-1}=\frac{3}{2}(a_n-a_{n-1})$,由此解得 $a_n=3a_{n-1}$,

即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=3(n\geqslant 2)$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为3,公比为3的等比数列,

故得: $a_n=3^n(n\in N)$ 5分

(2) 证法一:

(i) 先证明形如 $3^{2n+1}(n\in N)$ 的数为数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项,因而为数列 $\{d_n\}$ 中的项。

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^n$, $\therefore$ $3^{2n+1}\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$。

$$\because\quad 3^{2n+1}=3\cdot 9^n=3(8+1)^n=3(8^n+C_n{}^1 8^{n-1}+\cdots+C_n{}^{n-1}8+1)$$

$$=3[8(8^{n-1}+C_n{}^1 8^{n-2}+\cdots+C_n{}^{n-1})+1)]$$

令 $t=8^{n-1}+C_n{}^1 8^{n-2}+\cdots+C_n{}^{n-1}$,则 t 为正整数

$$\therefore\quad 3^{2n+1}=3(8t+1)=4\cdot(6t)+3$$

$$\therefore\quad 3^{2n+1}\in\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$$

$$\therefore\quad 3^{2n+1}\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots\}\cap\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$$ 8分

(ii) 再证明数列 $\{a_n\}$ 中除了形如 $3^{2n+1}(n\in N)$ 的项外,其它项都不是 $\{b_n\}$ 中的项,因而不是 $\{d_n\}$ 中的项。

显然 $a_1=3$ 不是 $\{b_n\}$ 中的项。

$$\because\quad a_{2n}=3^{2n}=(8+1)^n=8t+1=4(2t)+1(n,t\in N),$$

$\therefore$ $a_{2n}(n\in N)$ 不是 $\{b_n\}$ 中的项,因而不是 $\{d_n\}$ 中的项。

由(i)与(ii),数列 $\{d_n\}$ 的通项公式是

$$d_n=a_{2n+1}=3^{2n+1}\quad(n\in N)$$ 11分

证法二:

由计算可知,a_1,a_2 不是数列 $\{b_n\}$ 中的项。

$$\because\quad a_3=27=4\times 6+3,$$

$\therefore$ $d_1=27$ 是数列 $\{b_n\}$ 中的第6项。 6分

设 $a_k=3^k$ 是数列 $\{b_n\}$ 中的第 m 项,

则 $$3^k=4m+3(k,m\in N),$$ 8分

$$\because\quad a_{k+1}=3^{k+1}=3\cdot 3^k=3(4m+3)=4(3m+2)+1,$$

$\therefore$ a_{k+1} 不是数列 $\{b_n\}$ 中的项。

而 $$a_{k+2}=3^{k+2}=9\cdot 3^k=9(4m+3)=4(9m+6)+3,$$

$\therefore$ a_{k+2} 是数列 $\{b_n\}$ 中的项。由以上讨论可知

$$d_1=a_3,\quad d_2=a_5,\quad d_3=a_7,\cdots,d_n=a_{2n+1}$$

$\therefore$ 数列 $\{d_n\}$ 的通项公式是 $d_n=a_{2n+1}=3^{2n+1}\quad(n\in N)$ 11分

说明:如果考生用数学归纳法证明,可参照证法二给分。

(3) 由题意,$3^{2n+1}=4r+3$,

$$\therefore\quad r=\frac{3^{2n+1}-3}{4}=\frac{3}{4}(3^{2n}-1)$$ 14分

易知 $$B_r=\frac{r(b_1+b_r)}{2}=\frac{3(3^{2n}-1)(7+3^{2n+1})}{8}$$

$$D_n=\frac{d_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{27(3^{2n}-1)}{8}$$

$$T_n = B_r - D_n = \frac{9 \cdot 3^{4n} - 15 \cdot 3^{2n} + 6}{8}$$ 16分

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T_n}{(a_n)^4} = \frac{9}{8}$$ 18分