1997年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷(文史类)

一、选择题(本大题满分24分)本大题共有6题,每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论,其中有且只有一个结论是正确的,必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内,选对得4分,不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内),一律得零分。

1. 设全集是实数集 R, $M=\{x\mid x\leqslant 1+\sqrt{2},x\in R\}$, $N=\{1,2,3,4\}$,则 $\overline{M}\cap N$ 等于　(　　)

(A) $\{4\}$　(B) $\{3,4\}$　(C) $\{2,3,4\}$　(D) $\{1,2,3,4\}$

2. 三个数 $6^{0.7}$, 0.7^6, $\log_{0.7}6$ 的大小顺序是　(　　)

(A) $0.7^6<\log_{0.7}6<6^{0.7}$　(B) $0.7^6<6^{0.7}<\log_{0.7}6$

(C) $\log_{0.7}6<6^{0.7}<0.7^6$　(D) $\log_{0.7}6<0.7^6<6^{0.7}$

3. 在下列命题中,假命题是　(　　)

(A) 若 a、b 是异面直线,则一定存在平面 α 过 a 且与 b 平行

(B) 若 a、b 是异面直线,则一定存在平面 α 过 a 且与 b 垂直

(C) 若 a、b 是异面直线,则一定存在平面 α 与 a、b 所成角相等

(D) 若 a、b 是异面直线,则一定存在平面 α 与 a、b 的距离相等

4. 设 $k>1$,则关于 x、y 的方程 $(1-k)x^2+y^2=k^2-1$ 所表示的曲线是　(　　)

(A) 长轴在 y 轴上的椭圆　(B) 长轴在 x 轴上的椭圆

(C) 实轴在 y 轴上的双曲线　(D) 实轴在 x 轴上的双曲线

5. 如果直线 l 沿 x 轴负方向平移3个单位,再沿 y 轴正方向平移1个单位后,又回到原来的位置,那么直线 l 的斜率是　(　　)

(A) $-\dfrac{1}{3}$　(B) -3　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) 3

6. 设 $f(n)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3n-1}(n\in N)$,则 $f(n+1)-f(n)$ 等于　(　　)

(A) $\dfrac{1}{3n+2}$　(B) $\dfrac{1}{3n}+\dfrac{1}{3n+1}$

(C) $\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}$　(D) $\dfrac{1}{3n}+\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}$

二、填空题(本大题满分40分)本大题共有10题,只要求直接填写结果,每个空格填对得4分,否则一律得零分。

7. 方程 $\lg(1-3x)=\lg(3-x)+\lg(7+x)$ 的解是________。

8. 方程 $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 内解的个数是________。

9. 已知 $a=\dfrac{-3-i}{1+2i}$(i 是虚数单位),那么 $a^2=$________。

10. 设圆 $x^2+y^2-4x-5=0$ 的弦 AB 的中点为 $P(3,1)$,则直线 AB 的方程是________。

11. 若 $(3x+1)^n$（$n \in N$）的展开式中各项系数的和是 256，则展开式中 x^2 的系数是__________。

12. 函数 $f(x)=3\sin x\cos x-1$ 的最大值是__________。

选做题：考生可以从下列两组（A_1 组和 B_1 组）中选做一组试题，其中 A_1 组适合非试点校考生，B_1 组适合试点校考生。

A_1

13. 设 $0<a<b$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4b^n}{a^n-b^n}=$__________。

14. 设正四棱锥底面边长为 4cm，侧面和底面所成的二面角是 60°，则这个棱锥的侧面积是__________ cm^2。

15. 圆柱形容器的内壁底半径为 5cm，两个直径为 5cm 的玻璃小球都浸没于容器的水中．若取出这两个小球，则容器内的水面将下降__________ cm。

16. 从集合 $\{0,1,2,3,5,7,11\}$ 中任取 3 个元素分别作为直线方程 $Ax+By+C=0$ 中的 A、B、C，所得经过坐标原点的直线有__________条。（结果用数值表示）

B_1

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-2n}=$__________。

14. 设 $\vec{a}=(m+1)\vec{i}-3\vec{j}$，$\vec{b}=\vec{i}+(m-1)\vec{j}$，$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则 $m=$__________。

15. 设 $f(x)=x^2(2-x)$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是__________。

16. 从集合 $\{0,1,2,3,5,7,11\}$ 中任取 3 个元素分别作为直线方程 $Ax+By+C=0$ 中的 A、B、C，所得恰好经过坐标原点的直线的概率是__________。

三、解答题（本大题满分 86 分）本大题共有 6 题，解答下列各题必须写出必要的步骤。

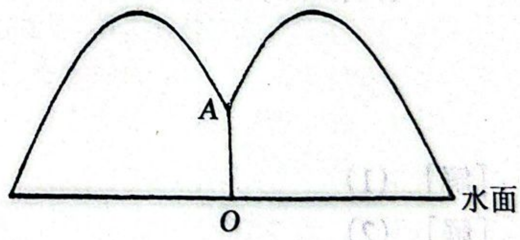
17.（本题满分 10 分）

已知 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值。

解：

18.（本题满分 10 分）

公园要建造一个圆形的喷水池．在水池中央垂直于水面安装一个花形柱子 OA，O 恰在水面中心，$OA=1.25$ 米，安置在柱子顶端 A 处的喷头向外喷水，水流在各个方向上沿形状相同的抛物线路径落下，且在过 OA 的任一平面上抛物线路径如图所示。为使水流形状较为漂亮，设计成水流在到 OA 距离为 1 米处达到距水面最大高度 2.25 米。如果不计其他因素，那么水池的半径至少要多少米，才能使喷出的水流不致落到池外？



解：

19.（本题满分 14 分） 本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分。

如图，在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，四边形 $A'ABB'$ 是菱形，四边形 $BCC'B'$ 是矩形，$C'B'\perp AB$。

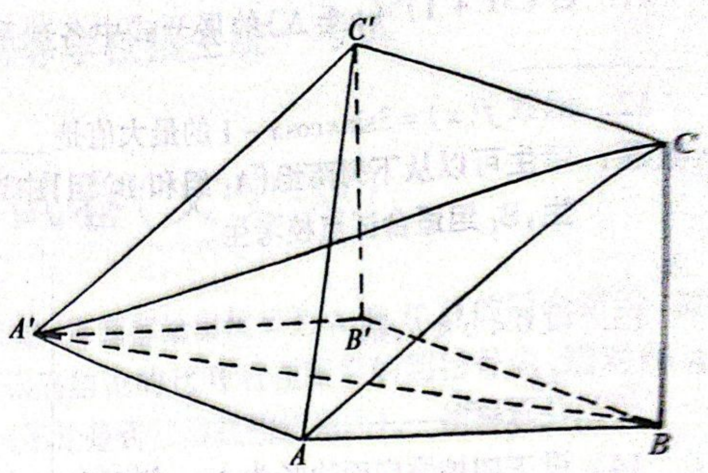
(1) 求证：平面 $CA'B\perp$平面 $A'AB$；

(2) 若 $C'B'=3$，$AB=4$，$\angle ABB'=60°$，

求 AC' 与平面 BCC' 所成角的大小。(用反三角函数表示)

［证］(1)

［解］(2)



选做题：考生可以从下列两组(A_2 组和 B_2 组)中选做一组试题，其中 A_2 组适合非试点校考生，B_2 组适合试点校考生。

A_2

20.(本题满分 16 分) 本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 8 分，第 2 小题满分 8 分。

设虚数 z_1、z_2 满足 $z_1^2=z_2$。

(1) 若 z_1、z_2 又是一个实系数一元二次方程的两个根，求 z_1、z_2；

(2) 若 $z_1=1+m\,i$(i 为虚数单位)，$|z_1|\leqslant\sqrt{2}$，复数 $\omega=z_2+3$，求 $|\omega|$ 的取值范围。

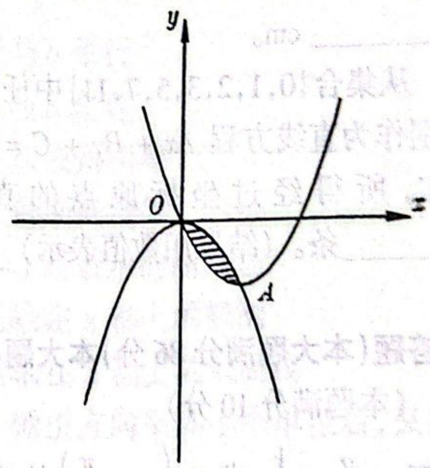
［解］(1)

［解］(2)

B_2

20.(本题满分 16 分) 本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 10 分。

如图，抛物线 C_1：$y=-x^2$ 与抛物线 C_2：$y=x^2-2ax(a>0)$ 交于 O、A 两点。



(1) 把 C_1 与 C_2 所围成的图形(阴影部分)绕 x 轴旋转一周，求所得几何体的体积 V；

(2) 若过原点的直线 l 与抛物线 C_2 所围成的图形面积为 $\dfrac{9}{2}a^3$，求直线 l 的方程。

21.(本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 7 分。

如图，抛物线方程为 $y^2=p(x+1)(p>0)$，直线 $x+y=m$ 与 x 轴的交点在抛物线的准线的右边。

(1) 求证：直线与抛物线总有两个交点；

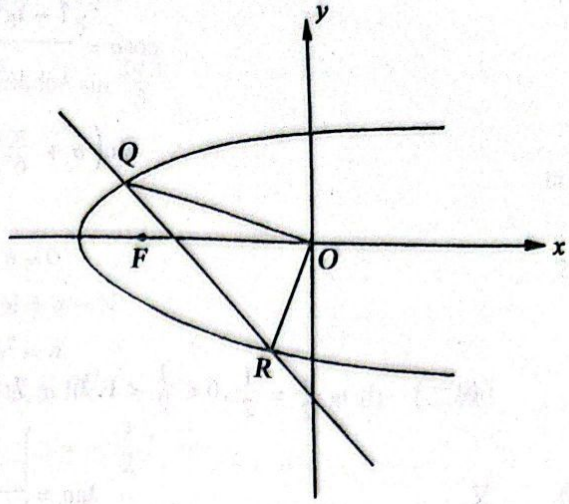
(2) 设直线与抛物线的交点为 Q、R，$OQ\perp OR$，求 p 关于 m 的函数 $f(m)$ 的表达式；

(3) 在(2)的条件下，若抛物线焦点 F 到直线 $x+y=m$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求此直线的方程。

［证］(1)

［解］ (2)

［解］ (3)



22.（本题满分18分） 本题共有3个小题，第1小题满分6分，第2小题满分6分，第3小题满分6分。

设数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$，前n项和S_n满足关系式：

$3tS_n-(2t+3)S_{n-1}=3t \quad (t>0, n=2,3,4,\cdots)$。

(1) 求证：数列$\{a_n\}$是等比数列；

(2) 设数列$\{a_n\}$的公比为$f(t)$，作数列$\{b_n\}$，使$b_1=1$，$b_n=f\left(\frac{1}{b_{n-1}}\right)(n=2,3,4,\cdots)$，求$b_n$；

(3) 求和：$b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-\cdots+b_{2n-1}b_{2n}-b_{2n}b_{2n+1}$。

［证］ (1)

［解］ (2)

［解］ (3)

数学试卷答案及评分标准

说明：

1. 本解答列出试题的一种或几种解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照本解答中评分标准的精神进行评分。

2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅，当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分。

3. 第17题至第22题中右端所注的分数，表示考生正确做到这一步应得的该题的累加分数。

4. 给分或扣分均以1分为单位。

一、本题共24分。每小题4分。

1. B 2. D 3. B 4. C 5. A 6. D

二、本题共40分。每空格4分。

7. $x=-5$ 8. 8 9. $-2i$ 10. $x+y-4=0$ 11. 54 12. $\frac{1}{2}$ 13. A_1: -4 B_1: e^4 14. A_1: 32 B_1: -2 15. A_1: $\frac{5}{3}$ B_1: $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ 16. A_1: 30 B_1: $\frac{1}{7}$

三、本题共86分。

17.（10分）解一：

$$\because \quad \sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5} \qquad 3分$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$$ 6分

$$\therefore\quad \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$ 10分

[解二] 由 $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}, 0<\frac{1}{2}<1$,知 α 为第一象限角, 2分

又 $$\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{3}{5}, \sin\alpha=\frac{4}{5}$$ 6分

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$ 10分

18. (10分)[解]如图建立直角坐标系,则水流所呈现的抛物线方程为

$$y=a(x-1)^2+2.25$$ 3分

由题意,点 A 的坐标为 $(0,1.25)$,把 $x=0$ 和 $y=1.25$ 代入上述方程,得 $a=-1$,于是抛物线方程为

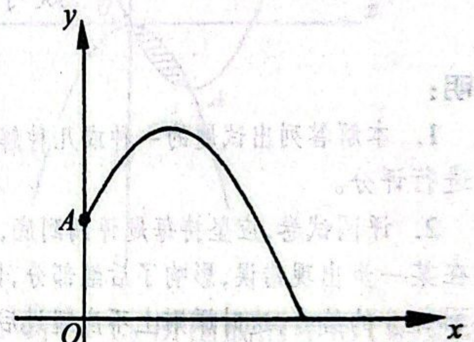
$$y=-(x-1)^2+2.25$$ 6分

令 $y=0$,得 $-(x-1)^2+2.25=0$

解得 $x_1=2.5, x_2=-0.5$(不合,舍去)

答:水池半径至少要 2.5 米,才能使水流不落到池外。

10分



19. (14分)第1小题6分。第2小题8分。

(1) [证] $\because$ 在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中, $C'B'\,/\!/\,CB$,

$\therefore$ $CB\perp AB$

又$\because$ $CB\perp BB'$

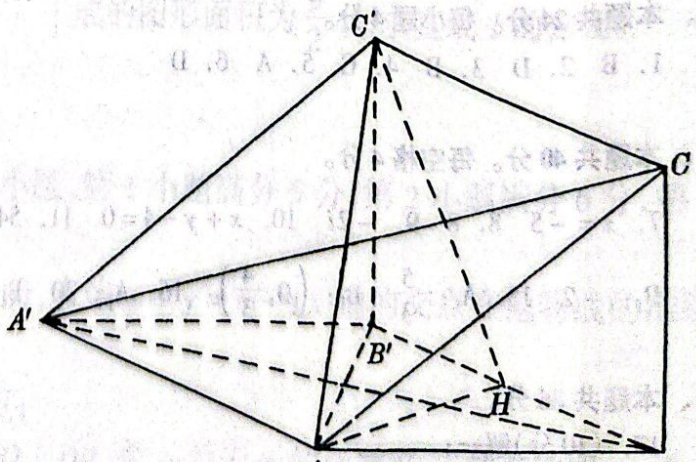
$AB\cap BB'=B$

$\therefore$ $CB\perp$平面 $A'AB$ 3分

$\because$ $CB\subset$平面 $CA'B$

$\therefore$ 平面 $CA'B\perp$平面 $A'AB$ 6分

(2) [解]由 $C'B'\perp$平面 $A'AB$,得平面 $A'AB\perp$平面 BCC'。过 A 作 $AH\perp$平面 BCC', H 为垂足,则 H 在 BB' 上。连接 $C'H$,则$\angle AC'H$ 为AC' 与平面 BCC' 所成的角。 10分



连接 AB',由四边形 $A'ABB'$ 是菱形, $\angle ABB'=60°$,可知$\triangle ABB'$ 为等边三角形,而 H 为 BB' 中点。又 $AB'=4, AH=2\sqrt{3}$,于是在 $\mathrm{Rt}\triangle C'B'A$

中，$AC'=\sqrt{4^2+3^2}=5$，而在 Rt$\triangle AHC'$ 中，$\sin\angle AC'H=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

$$\therefore\quad \angle AC'H=\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

因此，直线 AC' 与平面 BCC' 所成的角是 $\arcsin\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ 14分

20. (16分)每小题各 8 分。(A_2)

(1) 解一：设 $z_1=a+bi.\ z_2=a-bi(a,b\in R$ 且 $b\neq 0)$ 2分

由 $z_1{}^2=z_2$，得 $\qquad a^2-b^2+2abi=a-bi$

于是 $\qquad \begin{cases}a^2-b^2=a\\2ab=-b\end{cases}$

解得 $\qquad \begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\quad \begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 6分

$$\therefore\quad z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

或 $\qquad z_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 8分

解二：设实系数一元二次方程为 $z^2+pz+q=0(p^2-4q<0)$，

则 $\qquad z_1=\dfrac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}i}{2},\quad z_2=\dfrac{-p\mp\sqrt{4q-p^2}i}{2}$ 2分

由 $z_1{}^2=z_2$，得

$$\frac{p^2-(4q-p^2)}{4}\pm\frac{-2p\sqrt{4q-p^2}}{4}i=-\frac{p}{2}\mp\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}i$$

于是 $\qquad \begin{cases}\dfrac{p^2-2q}{2}=-\dfrac{p}{2}\\ \dfrac{-p\sqrt{4q-p^2}}{2}=\dfrac{-\sqrt{4q-p^2}}{2}\end{cases}$

解得 $\qquad \begin{cases}p=1\\q=1\end{cases}$ 6分

$$\therefore\quad z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

或 $\qquad z_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 8分

(2) 解：

由 $z_1=1+mi$，$|z_1|\leqslant\sqrt{2}$ 且 $m\neq 0$，得 $0<m^2\leqslant 1$， 10分

又 $z_2=z_1^2$，$\omega=z_2+3$，

$$\therefore\ \omega=(4-m^2)+2mi$$

$$|\omega|=\sqrt{(4-m^2)^2+4m^2}=\sqrt{(m^2-2)^2+12}$$ 14分

由 $0<m^2\leqslant 1$，得 $\quad 13\leqslant(m^2-2)^2+12<16$，即得 $\sqrt{13}\leqslant|\omega|<4$

$\therefore\quad |\omega|$ 的取值范围是 $[\sqrt{13},4)$。 16分

20. (16分)第 1 小题 6 分。第 2 小题 10 分。

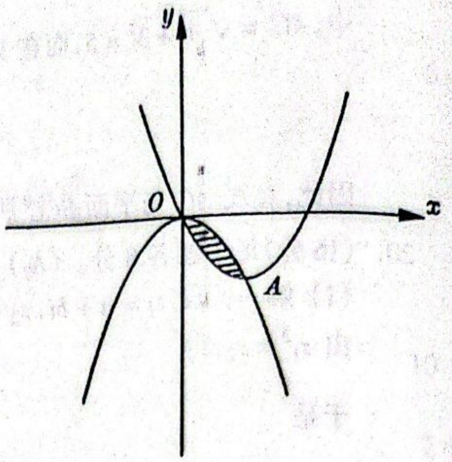
(B_2)(1) 解：C_1 和 C_2 交于两点 $O(0,0)$、$A(a,-a^2)$， 2分

$$V=\pi\int_0^a(x^2-2ax)^2dx-\pi\int_0^a(-x^2)^2dx$$

$$=4a\pi\int_0^a(-x^3+ax^2)dx$$

$$= 4a\pi\left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3\right)\Big|_0^a = \frac{\pi}{3}a^5$$ 6分

(2) 解:设过原点的直线方程为 $y = kx$,



解方程组 $\begin{cases} y = kx, \\ y = x^2 - 2ax, \end{cases}$ 得 $x_1 = 0, x_2 = k + 2a$ 8分

当 $k + 2a \geqslant 0$ 时,

$$S = \int_0^{k+2a}(kx - x^2 + 2ax)dx = \int_0^{k+2a}[(k+2a)x - x^2]dx$$

$$= \left(\frac{k+2a}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{k+2a} = \frac{(k+2a)^3}{6}$$

于是 $(k+2a)^3 = 27a^3$,

解得 $k = a$

所以,直线 l 的方程为 $y = ax$ 12分

当 $k + 2a < 0$ 时,

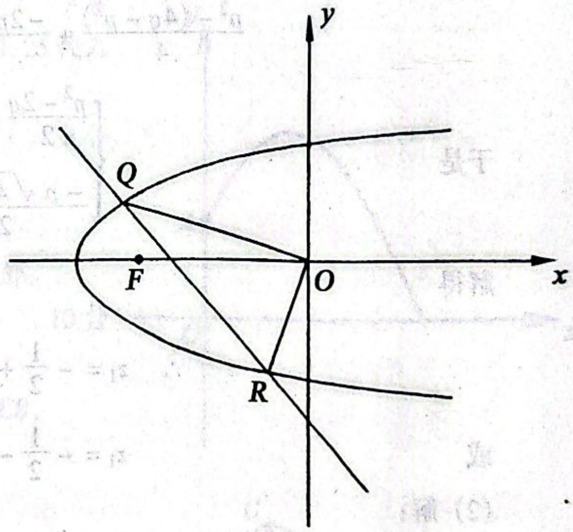
$$S = \int_{k+2a}^0[(k+2a)x - x^2]dx = -\frac{(k+2a)^3}{6},$$

于是 $-(k+2a)^3 = 27a^3$,

解得 $k = -5a$

所以,直线 l 的方程为 $y = -5ax$ 16分

21. (18)(1) 证:抛物线 $y^2 = p(x+1)$ 的准线方程是 $x = -1 - \frac{p}{4}$,直线 $x + y = m$ 与 x 轴的交点为 $(m, 0)$,则 $m > -1 - \frac{p}{4}$,即 $4m + p + 4 > 0$。 3分



由 $\begin{cases} y^2 = p(x+1), \\ x + y = m, \end{cases}$

得 $x^2 - (2m+p)x + (m^2 - p) = 0$,

而判别式 $\Delta = (2m+p)^2 - 4(m^2 - p)$

$= p(4m + p + 4)$

又 $p > 0$ 及 $4m + p + 4 > 0$,可见 $\Delta > 0$

因此,直线与抛物线总有两个交点。 5分

(2) 解:设 Q、R 两点的坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2),由(1)知,x_1, x_2 是方程 $x^2 - (2m+p)x + m^2 - p = 0$ 的两根,

所以 $x_1 + x_2 = 2m + p, x_1x_2 = m^2 - p$

由 $OQ \perp OR$,得 $K_{OQ} \cdot K_{OR} = -1$,

即有 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ 7分

又 Q,R 为直线 $x + y = m$ 上的点,因而

$$y_1 = -x_1 + m, \quad y_2 = -x_2 + m$$

于是 $x_1x_2 + y_1y_2 = 2x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 = 0$,

$$\therefore \quad p = f(m) = \frac{m^2}{m+2},$$

由 $\begin{cases} p > 0, \\ 4m + 4 + p > 0, \end{cases}$ 得 $m > -2, m \neq 0$ 11分

(3) 解:由于抛物线 $y^2 = p(x+1)$ 的焦点 F 坐标为 $\left(-1 + \frac{p}{4}, 0\right)$,于是有

$$\frac{\left|-1 + \frac{p}{4} + 0 - m\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\text{即}|p - 4m - 4| = 4$$ 13分

又 $p=\dfrac{m^2}{m+2}$，∴ $\left|\dfrac{3m^2+12m+8}{m+2}\right|=4$

解得 $$m_1=0, m_2=-\frac{8}{3}, m_3=-4, m_4=-\frac{4}{3}$$ 16分

但 $m\neq0$ 且 $m>-2$，因而舍去 m_1、m_2、m_3，故所求直线方程为 $3x+3y+4=0$ 18分

22. (18分)每小题6分。

解：(1)由 $S_1=a_1=1, S_2=a_1+a_2=1+a_2$，得
$$3t(1+a_2)-(2t+3)=3t,$$
可见 $$a_2=\frac{2t+3}{3t},$$
于是 $$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2t+3}{3t}$$ 2分

又 $$3tS_n-(2t+3)S_{n-1}=3t$$
$$3tS_{n-1}-(2t+3)S_{n-2}=3t$$
两式相减，得 $$3ta_n-(2t+3)a_{n-1}=0$$
于是 $$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2t+3}{3t}, n=3,4,\cdots$$
因此，$\{a_n\}$ 是一个首项为1，公比为 $\dfrac{2t+3}{3t}$ 的等比数列。 6分

(2) 由 $$f(t)=\frac{2t+3}{3t}=\frac{2}{3}+\frac{1}{t}$$
$$b_n=f\left(\frac{1}{b_{n-1}}\right)=\frac{2}{3}+b_{n-1}$$
可见，$\{b_n\}$ 是一个首项为1，公差为 $\dfrac{2}{3}$ 的等差数列。 9分

于是 $$b_n=1+\frac{2}{3}(n-1)=\frac{2n+1}{3}$$ 12分

(3) 由 $b_n=\dfrac{2n+1}{3}$，可知 $\{b_{2n-1}\}$ 和 $\{b_{2n}\}$ 是首项分别为1和 $\dfrac{5}{3}$，公差均为 $\dfrac{4}{3}$ 的等差数列，

于是 $$b_{2n}=\frac{4n+1}{3},$$ 14分

$$\begin{aligned}\therefore\ & b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-b_4b_5+\cdots\cdots+b_{2n-1}b_{2n}-b_{2n}b_{2n+1}\\ &=b_2(b_1-b_3)+b_4(b_3-b_5)+\cdots\cdots+b_{2n}(b_{2n-1}-b_{2n+1})\\ &=-\frac{4}{3}(b_2+b_4+\cdots\cdots+b_{2n})\\ &=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}n\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{4n+1}{3}\right)\\ &=-\frac{4}{9}(2n^2+3n)\end{aligned}$$ 18分