1997年全国普通高等学校招生统一考试

上海　　数学试卷(理工农医类)

考生注意：本试卷共有22道题，满分150分，试卷中的选做题按A_1组、A_2组与B_1组、B_2组排列，A_1组对应B_1组，A_2组对应B_2组．考生从对应的两组中可以且只可以选做一组，若同时做了对应的两组试题，或分别做了对应的两组中的部分试题，则只对考生在A组中所完成的部分进行评分和计分．

一、选择题(本大题满分24分)本大题共有6题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内)，一律得零分．

1. 设全集是实数集R，$M=\{x|x\leqslant 1+\sqrt{2}, x\in \mathrm{R}\}$，$N=\{1,2,3,4\}$，则$\overline{M}\cap N$等于……………………………………………………(　)

(A) $\{4\}$.　　　　(B) $\{3,4\}$.

(C) $\{2,3,4\}$.　　　　(D) $\{1,2,3,4\}$.

2. 三个数$6^{0.7}$，0.7^6，$\log_{0.7}6$的大小顺序是……………………………………………………(　)

(A) $0.7^6<\log_{0.7}6<6^{0.7}$.

(B) $0.7^6<6^{0.7}<\log_{0.7}6$.

(C) $\log_{0.7}6<6^{0.7}<0.7^6$.

(D) $\log_{0.7}6<0.7^6<6^{0.7}$.

3. 在下列命题中，假命题是…………(　)

(A) 若a、b是异面直线，则一定存在平面α过a且与b平行.

(B) 若a、b是异面直线，则一定存在平面α过a且与b垂直.

(C) 若a、b是异面直线，则一定存在平面α与a、b所成角相等.

(D) 若a、b是异面直线，则一定存在平面α与a、b的距离相等.

4. 设$\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$，则关于$x$、$y$的方程$x^2 \csc\theta - y^2 \sec\theta = 1$所表示的曲线是……( )

(A) 实轴在y轴上的双曲线.

(B) 实轴在x轴上的双曲线.

(C) 长轴在y轴上的椭圆.

(D) 长轴在x轴上的椭圆.

5. 如果直线l沿x轴负方向平移3个单位，再沿y轴正方向平移1个单位后，又回到原来的位置，那么直线l的斜率是……………………( )

(A) $-\frac{1}{3}$.　　(B) -3.

(C) $\frac{1}{3}$.　　(D) 3.

6. 设$f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$ $(n \in \mathrm{N})$，那么$f(n+1) - f(n)$等于……………………………………………………( )

(A) $\frac{1}{2n+1}$.

(B) $\frac{1}{2n+2}$.

(C) $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$.

(D) $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$.

二、填空题(本大题满分40分)本大题共有10题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

7. 二次曲线$\begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$ (θ是参数)的左焦点坐标是____.

8. 方程$\sin 2x = \frac{1}{2}$在$[-2\pi, 2\pi]$内解的个数是____.

9. 已知$a = \frac{-3-i}{1+2i}$ (i是虚数单位)，那么$a^4 =$____.

10. 设圆$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$的弦AB的中点为$P(3,1)$，则直线AB的方程是____.

11. 若$(3x+1)^n$ $(n \in \mathrm{N})$的展开式中各项系数的和是256，则展开式中x^2的系数是____.

12. 函数$f(x) = 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x$的最大值是____.

选做题：考生可以从下列两组(A_1组和B_1组)中选做一组试题，其中A_1组适合非试点校考生，B_1组适合试点校考生.

A_1

13. 设$0 < a < b$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4b^n}{a^n - b^n} =$____.

14. 设正四棱锥底面边长为4cm，侧面和底面所成的二面角是60°，则这个棱锥的侧面积是____cm^2.

15. 圆柱形容器的内壁底半径为5cm，两个直径为5cm的玻璃小球都浸没于容器的水中. 若取出这两个小球，则容器内的水面将下降____cm.

16. 从集合$\{0,1,2,3,5,7,11\}$中任取3个元素分别作为直线方程$Ax+By+C=0$中的A、B、C，所得经过坐标原点的直线有____条.(结果用数值表示)

B_1

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-2n} =$____.

14. 设$\vec{a} = (m+1)\vec{i} - 3\vec{j}$，$\vec{b} = \vec{i} + (m-1)\vec{j}$，$(\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b})$，则$m =$____.

15. 设$f(x) = x^2(2-x)$，则$f(x)$的单调递增区间是____.

16. 从集合$\{0,1,2,3,5,7,11\}$中任取3个元素分别作为直线方程$Ax+By+C=0$中的A、B、C，所得恰好经过坐标原点的直线的概率是____.

三、解答题(本大题满分86分)本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

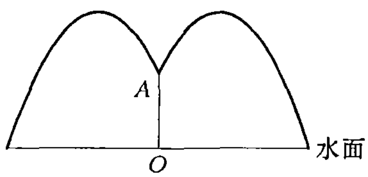
17.**(本题满分10分)**

已知$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$，求$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$的值.

18. **(本题满分10分)**

公园要建造一个圆形的喷水池. 在水池中央垂直于水面安装一个花形柱子OA，O恰在水面中心，$OA = 1.25$米，安置在柱子顶端A处的喷头向外喷水，水流在各个方向上沿形状

相同的抛物线路径落下，且在过OA的任一平面上抛物线路径如图所示. 为使水流形状较为漂亮，设计成水流在到OA距离为1米处达到距水面最大高度2.25米. 如果不计其它因素，那么水池的半径至少要多少米，才能使喷出的水流不致落到池外?

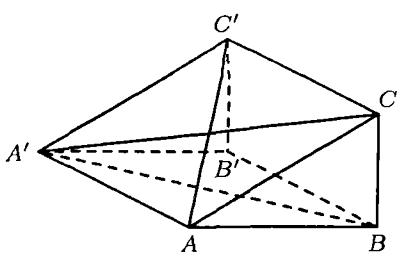


19. **(本题满分14分) 本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.**

如图，在三棱柱$ABC-A'B'C'$中，四边形$A'ABB'$是菱形，四边形$BCC'B'$是矩形，$C'B'\perp AB$.

(1) 求证: 平面$CA'B\perp$平面$A'AB$;

(2) 若$C'B'=3$，$AB=4$，$\angle ABB'=60°$，求AC'与平面BCC'所成角的大小. (用反三角函数表示)



选做题: 考生可以从下列两组 (A_2组和B_2组) 中选做一组试题，其中A_2组适合非试点校考生，B_2组适合试点校考生.

A_2

20. **(本题满分16分) 本题共有2个小题，第1小题满分8分，第2小题满分8分.**

设虚数z_1、z_2满足$z_1^2=z_2$.

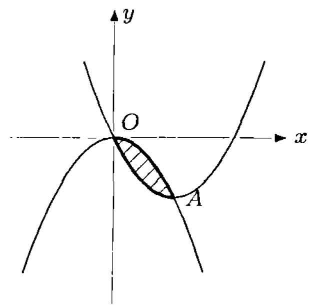
(1) 若z_1、z_2又是一个实系数一元二次方程的两个根，求z_1、z_2;

(2) 若$z_1=1+mi\,(m>0, i$为虚数单位$)$，$\omega=z_2-2$，ω的辐角主值为θ，求θ的取值范围.

B_2

20. **(本题满分16分) 本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分10分.**

如图，抛物线$C_1: y=-x^2$与抛物线$C_2: y=x^2-2ax\,(a>0)$交于O、A两点.

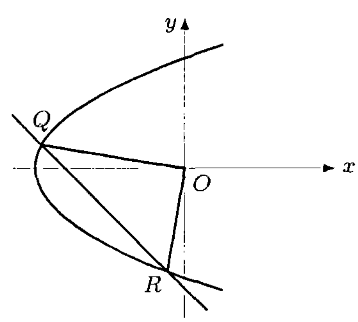


(1) 把C_1与C_2所围成的图形(阴影部分)绕x轴旋转一周，求所得几何体的体积V;

(2) 若过原点的直线l与抛物线C_2所围成的图形面积为$\frac{9}{2}a^3$，求直线l的方程.

21. **(本题满分18分) 本题共有3个小题，第1小题满分5分，第2小题满分6分，第3小题满分7分.**

如图，抛物线方程为$y^2=p(x+1)\,(p>0)$，直线$x+y=m$与x轴的交点在抛物线的准线的右边.



(1) 求证: 直线与抛物线总有两个交点;

(2) 设直线与抛物线的交点为Q、R，$OQ\perp OR$，求p关于m的函数$f(m)$的表达式;

(3) 在(2)的条件下，若m变化，使得原点O到直线QR的距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，求p的取值范围.

22. **(本题满分18分) 本题共有3个小题，第1小题满分6分，第2小题满分6分，第3小题满分6分.**

设数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$，前n项和S_n满足关系式：$3tS_n-(2t+3)S_{n-1}=3t$ ($t>0$, $n=2,3,4,\cdots$).

(1) 求证：数列$\{a_n\}$是等比数列；

(2) 设数列$\{a_n\}$的公比为$f(t)$，作数列$\{b_n\}$，使$b_1=1$，$b_n=f\left(\frac{1}{b_{n-1}}\right)$ ($n=2,3,4,\cdots$)，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg a_n}{b_n}$；

(3) 求和：$b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-\cdots+(-1)^{n-1}b_nb_{n+1}$.

上海数学试卷(理工农医类)答案要点

一、(第1题至第6题)

题号	1	2	3	4	5	6
代号	B	D	B	C	A	D

二、(第7题至第16题)

7. $(-4,0)$. 8. 8.

9. -4. 10. $x+y-4=0$.

11. 54. 12. $\frac{1}{2}$.

13. $A_1:-4$. $B_1:e^4$.

14. $A_1:32$. B_1-2.

15. $A_1:\frac{5}{3}$. $B_1:\left(0,\frac{4}{3}\right)$.

16. $A_1:30$. $B_1:\frac{1}{7}$.

三、(第17题至第22题)

17. [解一]:

$$\because \sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}.$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}.$$

$$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$$

[解二] 由$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, $0<\frac{1}{2}<1$，知α为第一象限角，

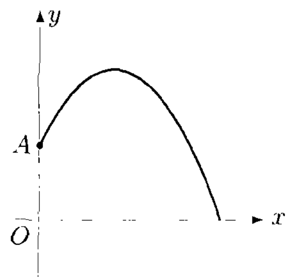
$$\text{又}\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3},$$

$$\therefore \cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5},$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$$

18. [解] 如图建立直角坐标系，则水流所呈现的抛物线方程为

$$y=a(x-1)^2+2.25.$$



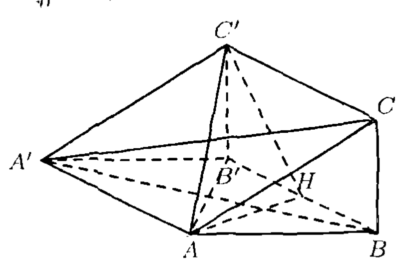
由题意，点A的坐标为$(0,1.25)$，把$x=0$和$y=1.25$代入上述方程，得$a=-1$，于是抛物线方程为

$$y=-(x-1)^2+2.25.$$

令$y=0$，得$-(x-1)^2+2.25=0$，解得$x_1=2.5$, $x_2=-0.5$(不合，舍去).

答：水池半径至少要2.5米，才能使水流不落到池外.

19. (1) [证] $\because$在三棱柱$ABC-A'B'C'$中，$C'B'/\!/CB$，



$\therefore CB\perp AB$.

又$\because CB\perp BB'$,

$AB \cap BB' = B$,

$\therefore CB \perp$ 平面 $A'AB$.

$\because CB \subset$ 平面 $CA'B$,

$\therefore$ 平面 $CA'B \perp$ 平面 $A'AB$.

(2) [解]: 由 $C'B' \perp$ 平面 $A'AB$, 得平面 $A'AB \perp$ 平面 BCC'. 过 A 作 $AH \perp$ 平面 BCC', H 为垂足, 则 H 在 BB' 上. 连接 $C'H$, 则 $\angle AC'H$ 为 AC' 与平面 BCC' 所成的角.

连接 AB', 由四边形 $A'ABB'$ 是菱形, $\angle ABB' = 60°$, 可知 $\triangle ABB'$ 为等边三角形, 而 H 为 BB' 中点. 又 $AB' = 4$, $AH = 2\sqrt{3}$, 于是在 $\mathrm{Rt}\triangle C'B'A$ 中, $AC' = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, 而在 $\mathrm{Rt}\triangle AHC'$ 中, $\sin\angle AC'H = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$,

$$\therefore \angle AC'H = \arcsin\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

因此, 直线 AC' 与平面 BCC' 所成的角是 $\arcsin\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

20. (A_2)

(1) [解一] 设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = a - bi$ ($a, b \in \mathrm{R}$ 且 $b \neq 0$).

由 $z_1^2 = z_2$, 得 $a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$,

于是 $\begin{cases} a^2 - b^2 = a, \\ 2ab = -b. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2}, \\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2}, \\ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

$\therefore z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;

或 $z_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

[解二] 设实系数一元二次方程为 $z^2 + pz + q = 0$ ($p^2 - 4q < 0$).

则 $z_1 = \dfrac{-p \pm \sqrt{4q - p^2}i}{2}$,

$z_2 = \dfrac{-p \mp \sqrt{4q - p^2}i}{2}$,

由 $z_1^2 = z_2$, 得

$\dfrac{p^2 - (4q - p^2)}{4} \pm \dfrac{-2p\sqrt{4q - p^2}}{4}i$

$= -\dfrac{p}{2} \mp \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}i$,

于是 $\begin{cases} \dfrac{p^2 - 2q}{2} = -\dfrac{p}{2}, \\ \dfrac{-p\sqrt{4q - p^2}}{2} = \dfrac{-\sqrt{4q - p^2}}{2}. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} p = 1, \\ q = 1. \end{cases}$

$\therefore z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

或 $z_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2) [解] 由 $z_1 = 1 + mi$ ($m > 0$), $z_1^2 = z_2$, 得 $z_2 = (1 - m^2) + 2mi$,

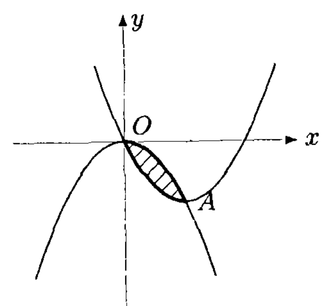
$$\therefore \omega = -(1 + m^2) + 2mi;$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = -\frac{2m}{1 + m^2} = -\frac{2}{m + \frac{1}{m}}.$$

由 $m > 0$, 知 $m + \dfrac{1}{m} \geqslant 2$. 于是 $-1 \leqslant \mathrm{tg}\,\theta < 0$. 又由 $-(m^2 + 1) < 0$, $2m > 0$, 得 $\dfrac{3\pi}{4} \leqslant \theta < \pi$.

因此, 所求 θ 的取值范围为 $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

20. (B_2)



(1) [解] C_1 和 C_2 交于两点 $O(0,0)$、$A(a, -a^2)$,

$$V = \pi\int_0^a (x^2 - 2ax)^2 dx - \pi\int_0^a (-x^2)^2 dx$$

$$= 4a\pi\int_0^a (-x^3 + ax^2) dx$$

$$= 4a\pi\left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3\right)\Big|_0^a = \frac{\pi}{3}a^5.$$

(2) [解] 设过原点的直线方程为 $y = kx$, 解方程组 $\begin{cases} y = kx, \\ y = x^2 - 2ax, \end{cases}$ 得 $x_1 = 0$, $x_2 = k + 2a$.

当 $k + 2a \geqslant 0$ 时,

$$S=\int_0^{k+2a}(kx-x^2+2ax)dx$$
$$=\int_0^{k+2a}[(k+2a)x-x^2]dx$$
$$=\left(\frac{k+2a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{k+2a}$$
$$=\frac{(k+2a)^3}{6}.$$

于是$(k+2a)^3=27a^3$,

解得$k=a$.

所以, 直线l的方程为$y=ax$.

当$k+2a<0$时,

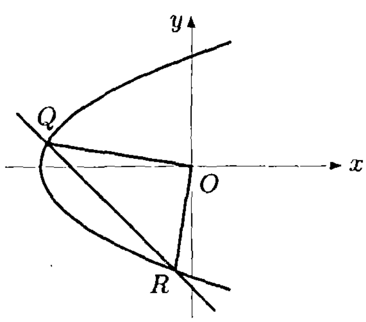
$$S=\int_{k+2a}^{0}[(k+2a)x-x^2]dx=-\frac{(k+2a)^3}{6}.$$

于是$-(k+2a)^3=27a^3$,

解得$k=-5a$.

所以, 直线l的方程为$y=-5ax$.

21. (1) [证]抛物线$y^2=p(x+1)$的准线方程是$x=-1-\frac{p}{4}$, 直线$x+y=m$与x轴的交点为$(m,0)$, 则$m>-1-\frac{p}{4}$, 即$4m+p+4>0$.



由$\begin{cases}y^2=p(x+1),\\x+y=m,\end{cases}$

得$x^2-(2m+p)x+(m^2-p)=0$,

而判别式$\Delta=(2m+p)^2-4(m^2-p)=p(4m+p+4)$.

又$p>0$及$4m+p+4>0$, 可见$\Delta>0$.

因此, 直线与抛物线总有两个交点.

(2) [解] 设Q、R两点的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2), 由(1)知, x_1, x_2是方程$x^2-(2m+p)x+m^2-p=0$的两根.

所以$x_1+x_2=2m+p$, $x_1x_2=m^2-p$.

由$OQ\perp OR$, 得$K_{OQ}\cdot K_{OR}=-1$, 即有$x_1x_2+y_1y_2=0$.

又Q, R为直线$x+y=m$上的点, 因而

$$y_1=-x_1+m, y_2=-x_2+m.$$

于是$x_1x_2+y_1y_2=2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2=0$,

$\therefore p=f(m)=\frac{m^2}{m+2}$.

由$\begin{cases}p>0,\\4m+4+p>0,\end{cases}$ 得$m>-2$, $m\neq0$.

(3) [解一] 由于原点O到直线$x+y=m$的距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$, 于是

$$\frac{|0+0-m|}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore |m|\leqslant 1$.

由(2)知$m>-2$且$m\neq0$, 故

$m\in[-1,0)\cup(0,1]$.

由(2),

$$f(m)=\frac{m^2}{m+2}=(m+2)+\frac{4}{m+2}-4.$$

当$m\in[-1,0)$时, 任取m_1、m_2,

$0>m_1>m_2\geqslant-1$, 则

$$f(m_1)-f(m_2)=(m_1-m_2)+\left(\frac{4}{m_1+2}-\frac{4}{m_2+2}\right)$$
$$=(m_1-m_2)\left[1-\frac{4}{(m_1+2)(m_2+2)}\right],$$

由$0>m_1>m_2\geqslant-1$, 知$0<(m_1+2)(m_2+2)<4$, $1-\frac{4}{(m_1+2)(m_2+2)}<0$, 又由$m_1-m_2>0$, 知$f(m_1)<f(m_2)$, 因而$f(m)$为减函数. 可见, 当$m\in[-1,0)$时, $p\in(0,1]$.

同样可证, 当$m\in(0,1]$时, $f(m)$为增函数, 从而$p\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$.

[解二] 由解一知, $m\in[-1,0)\cup(0,1]$.

由(2)知,

$$p=f(m)=\frac{m^2}{m+2}=\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{2}{m^2}}.$$

设$t=\frac{1}{m}$, $g(t)=t+2t^2$, 则

$t \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$, 又

$$g(t)=2t^2+t=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}.$$

$\therefore$ 当 $t \in (-\infty,-1]$ 时, $g(t)$ 为减函数, $g(t) \in [1,+\infty)$;

当 $t \in (1,+\infty)$ 时, $g(t)$ 为增函数, $g(t) \in [3,+\infty)$. 可见, 当 $m \in [-1,0)$ 时, $t \in (-\infty,-1]$, $p=\dfrac{1}{g(t)} \in (0,1]$;

当 $m \in (0,1]$ 时, $t \in [1,+\infty)$, $p \in \left(0,\dfrac{1}{3}\right]$.

22. [解] (1) 由 $S_1=a_1=1$, $S_2=a_1+a_2=1+a_2$, 得

$$3t(1+a_2)-(2t+3)=3t,$$

可见 $a_2=\dfrac{2t+3}{3t}$, $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2t+3}{3t}$.

又 $3tS_n-(2t+3)S_{n-1}=3t$,

$3tS_{n-1}-(2t+3)S_{n-2}=3t$,

两式相减, 得 $3ta_n-(2t+3)a_{n-1}=0$.

于是 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2t+3}{3t}$, $n=3,4,\cdots$.

因此, $\{a_n\}$ 是一个首项为1, 公比为 $\dfrac{2t+3}{3t}$ 的等比数列.

(2) 由 $f(t)=\dfrac{2t+3}{3t}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{t}$, $b_n=f\left(\dfrac{1}{b_{n-1}}\right)=\dfrac{2}{3}+b_{n-1}$, 可见, $\{b_n\}$ 是一个首项为1, 公差为 $\dfrac{2}{3}$ 的等差数列.

于是 $b_n=1+\dfrac{2}{3}(n-1)=\dfrac{2n+1}{3}$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\lg a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n-1)\lg\left(\frac{2t+3}{3t}\right)}{2n+1}=\frac{3}{2}\lg\left(\frac{2t+3}{3t}\right).$$

(3) 由 $b_n=\dfrac{2n+1}{3}$, 可知 $\{b_{2n-1}\}$ 和 $\{b_{2n}\}$ 是首项分别为1和 $\dfrac{5}{3}$, 公差均为 $\dfrac{4}{3}$ 的等差数列, 于是 $b_{2n}=\dfrac{4n+1}{3}$, $b_{2n+1}=\dfrac{4n+3}{3}$.

当 $n=2m\,(m=1,2,\cdots\cdots)$ 时, $b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-b_4b_5+\cdots+b_{2m-1}b_{2m}-b_{2m}b_{2m+1}$ $=b_2(b_1-b_3)+b_4(b_3-b_5)+\cdots+b_{2m}(b_{2m-1}-b_{2m+1})=-\dfrac{4}{3}(b_2+b_4+\cdots+b_{2m})=-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{2}m\cdot\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{4m+1}{3}\right)=-\dfrac{4}{9}m(2m+3)=-\dfrac{1}{9}(2n^2+6n)$;

当 $n=2m-1\,(m=1,2,\cdots\cdots)$ 时, $b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-b_4b_5+\cdots-b_{2m-2}b_{2m-1}+b_{2m-1}b_{2m}=-\dfrac{4}{9}m(2m+3)+b_{2m}b_{2m+1}=-\dfrac{4}{9}m(2m+3)+\dfrac{(4m+1)(4m+3)}{9}=\dfrac{1}{9}(8m^2+4m+3)=\dfrac{1}{9}(2n^2+6n+7)$.

$$\therefore b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-\cdots+(-1)^{n-1}b_nb_{n+1}=\begin{cases}-\dfrac{1}{9}(2n^2+6n), & n\text{为偶数};\\ \dfrac{1}{9}(2n^2+6n+7), & n\text{为奇数}.\end{cases}$$