

上海 数学试卷(文史类)

考生注意:

本试卷共有 22 道试题, 满分 150 分。

一、填空题(本大题满分 44 分)本大题共有 11 题, 只要求直接填写结果, 每个空格填对得 4 分, 否则一律得零分。

1. $\lg 20 + \log_{100} 25 =$ _____。

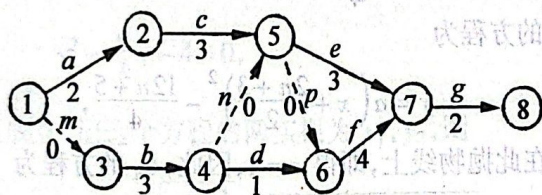
2. 若函数 $y = 2\sin x + \sqrt{a}\cos x + 4$ 的最小值为 1, 则 $a =$ _____。

3. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + 3}{x^3 + 3} = 2$, 则 $a =$ _____。

4. 函数 $f(x) = (x - 1)^{\frac{1}{3}} + 2$ 的反函数是 $f^{-1}(x) =$ _____。

5. 棱长为 2 的正四面体的体积为 _____。

6. 某工程的工序流程图如下(工时数单位: 天):



则工程总时数为 _____ 天。

7. 袋内装有大小相同的 4 个白球和 3 个黑球, 从中任意摸出 3 个球, 其中只有一个黑球的概率是 _____。

8. 函数 $y = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ x + 3, & 0 < x \leq 1 \\ -x + 5, & x > 1 \end{cases}$ 的最大值是 _____。

9. 设 n 是一个自然数, $(1 + \frac{x}{n})^n$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\frac{1}{16}$, 则 $n =$ _____。

10. 在数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 且对任意自然数 n , $3a_{n+1} - a_n = 0$, b_n 是 a_n 与 a_{n+1} 的等差中项, 则 $\{b_n\}$ 的各项和是 _____。

11. 与椭圆 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 有相同焦点且以 $y = \pm \frac{4}{3}x$ 为渐近线的双曲线方程是 _____。

二、选择题(本大题满分 20 分)本大题共有 5 题, 每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得 4 分, 不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内), 一律得零分。

12. 下列函数中,周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数是 ()

- (A) $y = \sin 4x$ (B) $y = \cos^2 2x - \sin^2 2x$
 (C) $y = \operatorname{tg} 2x$ (D) $y = \cos 2x$

13. 若 $0 < a < 1$, 则函数 $y = \log_a(x+5)$ 的图象不经过 ()

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

14. 在下列命题中,假命题是 ()

- (A) 若平面 α 内的一条直线 l 垂直于平面 β 内的任一直线,则 $\alpha \perp \beta$
 (B) 若平面 α 内的任一直线平行于平面 β ,则 $\alpha \parallel \beta$
 (C) 若平面 $\alpha \perp$ 平面 β ,任取直线 $l \subset \alpha$,则必有 $l \perp \beta$
 (D) 若平面 $\alpha \parallel$ 平面 β ,任取直线 $l \subset \alpha$,则必有 $l \parallel \beta$

15. 设全集为 $R, A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 > 0\}, B = \{x \mid |x - 5| < a\}$ (a 是常数),且 $11 \in B$, 则

- (A) $\bar{A} \cup B = R$ (B) $A \cup \bar{B} = R$ (C) $\bar{A} \cup \bar{B} = R$ (D) $A \cup B = R$

16. 设 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对边的边长, 则直线 $\sin A \cdot x + ay + c = 0$ 与 $bx - \sin B \cdot y + \sin C = 0$ 的位置关系是

- (A) 平行 (B) 重合 (C) 垂直 (D) 相交但不垂直

三、解答题(本大题满分 86 分)本大题共有 6 题,解答下列各题必须写出必要的步骤。

17. (本题满分 8 分)

设 α 是第二象限角, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 求 $\sin\left(\frac{37}{6}\pi - 2\alpha\right)$ 的值。

[解]

18. (本题满分 12 分)

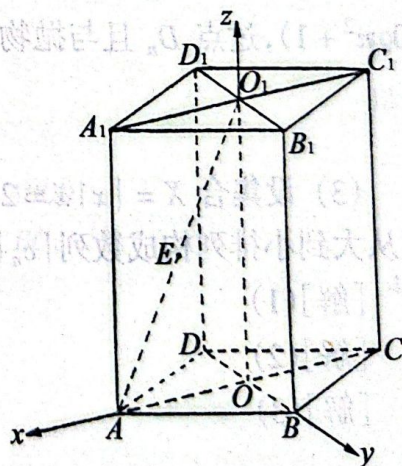
已知复数 z_1 满足 $(z_1 - 2)i = 1 + i$, 复数 z_2 的虚部为 2, 且 $z_1 \cdot z_2$ 是实数, 求复数 z_2 的模。

[解]

19. (本题满分 16 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 8 分,第 2 小题满分 8 分。

直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的高为 6, 底面是边长为 4, $\angle DAB = 60^\circ$ 的菱形, AC 与 BD 相交于 O, A_1C_1 与 B_1D_1 相交于 O_1, E 是 O_1A 的中点。

- (1) 求二面角 $O_1 - BC - D$ 的大小(用反三角函数表示);
 (2) 分别以射线 OA, OB, OO_1 为 x 轴, y 轴, z 轴的正半轴建立空间直角坐标系, 求点 B_1, D_1, E 的坐标, 并求异面直线 OB_1 与 D_1E 所成角的大小(用反三角函数表示)。



[解](1)

[解](2)

20. (本题满分 16 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 6 分,第 2 小题满分 10 分。

(1) 设动点 M 到定点 $D(2,0)$ 的距离与到 y 轴的距离相等, 求点 M 的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 $D(2,0)$ 的直线 l 交上述轨迹 C 于 P, Q 两点, E 点坐标是 $(1,0)$, 若 $\triangle EPQ$ 的面积为 4, 求直线 l 的倾斜角 α 的值。

[解](1)

[解](2)

21. (本题满分 16 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 7 分, 第 3 小题满分 3 分。

设某物体一天中的温度 T 是时间 t 的函数: $T(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ ($a \neq 0$), 其中温度的单位是 $^{\circ}\text{C}$, 时间的单位是小时, $t = 0$ 表示 12:00, t 取正值表示 12:00 以后。若测得该物体在 8:00 的温度为 8°C , 12:00 的温度为 60°C , 13:00 的温度为 58°C , 且已知该物体的温度在 8:00 和 16:00 有相同的变化率。

(1) 写出该物体的温度 T 关于时间 t 的函数关系式;

(2) 该物体在 10:00 到 14:00 这段时间中(包括 10:00 和 14:00), 何时温度最高? 并求出最高温度;

(3) 如果规定一个函数 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ ($x_1 < x_2$) 上函数值的平均为 $\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$, 求该物体在 8:00 到 16:00 这段时间内的平均温度。

[解](1)

[解](2)

[解](3)

22. (本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 8 分, 第 3 小题满分 6 分。

若 A_n 和 B_n 分别表示数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 前 n 项的和, 对任意正整数 n ,

$$a_n = -\frac{2n+3}{2}, 4B_n - 12A_n = 13n.$$

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设有抛物线列 $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, 抛物线 $C_n: y = a(x - a_n)^2 + b_n$ ($n \in N$) 通过点 $D_n(0, n^2 + 1)$, 过点 D_n 且与抛物线 C_n 相切的直线斜率为 k_n , 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n}{a_n b_n};$$

(3) 设集合 $X = \{x | x = 2a_n, n \in N\}$, $Y = \{y | y = 4b_n, n \in N\}$ 。把 $X \cap Y$ 中小于 -100 的元素从大到小排列构成数列 $\{c_n\}$, 求 c_n 的通项公式。

[解](1)

[解](2)

[解](3)

数学试卷答案及评分标准

说明:

1. 本解答列出试题的一种或几种解法, 如果考生的解法与所列解法不同, 可参照解答中评分标准的精神进行评分。

2. 评阅试卷,应坚持每题评阅到底,不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅,当考生的解答在某一步出现错误,影响了后继部分,但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时,可视影响程度决定后面部分的给分,这时原则上不应超过后面部分应给分数之半,如果有较严重的概念性错误,就不给分。

3. 第 17 题至第 22 题中右端所注的分数,表示考生正确做到这一步应得的该题的累加分数。

4. 给分或扣分均以 1 分为单位。

一、本题共 44 分。每小题结果正确的给 4 分,否则一律得零分。

1. 2 2. 5 3. 4 4. $(x-2)^3+1, x \in R$ 5. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 6. 11 7. $\frac{18}{35}$ 8. 4 9. 4 10. 2 11. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

二、本题共 20 分。每小题 4 分。

12. B 13. A 14. C 15. D 16. C

三、本题共 86 分。

17. (8 分)解:

$\therefore \alpha$ 是第二象限角, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$,

$\therefore \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

2 分

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{24}{25}$,

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7}{25}$,

5 分

$\therefore \sin\left(\frac{37}{6}\pi - 2\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos 2\alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin 2\alpha = \frac{7+24\sqrt{3}}{50}$

8 分

18. (12 分)解:

$z_1 \cdot i - 2i = 1 + i, z_1 \cdot i = 1 + 3i,$

$z_1 = \frac{1+3i}{i} = 3 - i$

4 分

设
则

$z_2 = t + 2i (t \in R),$

6 分

$z_1 \cdot z_2 = (3 - i) \cdot (t + 2i) = (3t + 2) + (6 - t)i$

$\therefore z_1 \cdot z_2 \in R, \therefore 6 - t = 0, \text{ 得 } t = 6$

$\therefore z_2 = 6 + 2i$

10 分

$\therefore |z_2| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$

12 分

19. (16 分)每小题各 8 分。

(1) 解: $\because DD_1 \perp$ 底面 $ABCD, O_1O \parallel D_1D, \therefore O_1O \perp$ 底面 $ABCD$

过 O 作 $OF \perp BC$ 交 BC 于 F , 连结 O_1F , 根据三垂线定理得 $O_1F \perp BC$,

$\therefore \angle O_1FO$ 是二面角 $O_1 - BC - D$ 的平面角。

4 分

$\because OC = OA = 4 \times \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}, OB = OD = 2,$

$\therefore OF = \frac{OC \cdot OB}{BC} = \sqrt{3}$

$\therefore \tan \angle O_1FO = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

\therefore 二面角 $O_1 - BC - D$ 的大小为 $\arctan 2\sqrt{3}$

8 分

(2) 解: 由条件得 O, B_1, D_1, E 的坐标为:

$O(0,0,0), B_1(0,2,6),$

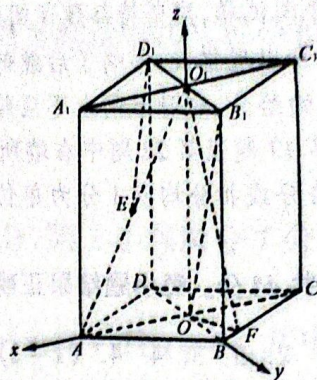
$D_1(0,-2,6), E(\sqrt{3},0,3)$

$\therefore \overrightarrow{OB_1} = \{0, 2, 6\}, \overrightarrow{D_1E} = \{\sqrt{3}, 2, -3\}$

记向量 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{D_1E}$ 的夹角为 α , 则

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{D_1E}}{|\overrightarrow{OB_1}| \cdot |\overrightarrow{D_1E}|} = -\frac{7\sqrt{10}}{40} \quad 11 \text{分}$$

由此可得异面直线 OB_1 与 D_1E 所成的角为 $\arccos \frac{7\sqrt{10}}{40}$ 。



11分

16分

20. (16分)第1小题6分。第2小题10分。

(1) 解法一: 根据抛物线的定义, 轨迹 C 是以 D 为焦点, y 轴为准线的抛物线, 其顶点坐标是 $(1, 0)$, $p = 2$, 开口向右。

3分

\therefore 轨迹 C 的方程为 $y^2 = 4(x - 1)$

6分

解法二: 设动点 M 的坐标为 (x, y) , 则 $\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = |x|$

3分

两边平方得: $x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2$

\therefore 轨迹 C 的方程为 $y^2 = 4(x - 1)$

6分

(2) 解法一: 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$, 因 l 与抛物线有两个交点, 故 $k \neq 0$,

得 $x = \frac{y}{k} + 2$, 代入 $y^2 = 4(x - 1)$ 得

$$y^2 - \frac{4}{k}y - 4 = 0,$$

$\Delta = \frac{16}{k^2} + 16 > 0$ 恒成立, 记这个方程的两实根为 y_1, y_2 , 则

$$|PQ| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_1 - y_2| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{4(k^2 + 1)}{k^2}$$

10分

又点 E 到直线 l 的距离

$$d = \frac{|k \cdot 1 - 0 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$\therefore \triangle EPQ$ 的面积为

$$S_{\triangle EPQ} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d = \frac{2\sqrt{k^2 + 1}}{|k|}$$

13分

由 $\frac{2\sqrt{k^2 + 1}}{|k|} = 4$ 解得 $k^2 = \frac{1}{3}$, $\therefore k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ 或 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

16分

解法二: 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$, 代入 $y^2 = 4(x - 1)$, 得

$$k^2x^2 - (4k^2 + 4)x + 4k^2 + 4 = 0,$$

因 l 与抛物线有两个交点, 故 $k \neq 0$, 而 $\Delta = 16(k^2 + 1) > 0$ 恒成立, 记这个方程的两个实根为 x_1, x_2 , 因抛物线 $y^2 = 4(x - 1)$ 的焦点是 $D(2, 0)$, 准线是 $x = 0$, 所以

$$|PQ| = x_1 + x_2 = \frac{4(k^2 + 1)}{k^2} \quad 10 \text{分}$$

其余同解法一。

21. (16分)第1小题6分。第2小题7分。第3小题3分。

(1) 解: 根据条件可得

$$T(0) = 60, T(-4) = 8, T(1) = 58, T'(-4) = T'(4),$$

3分

则 $d = 60, b = 0, a = 1, c = -3$,

因此, 温度函数 $T(t) = t^3 - 3t + 60$

6分

(2) 解: $T'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t - 1)(t + 1)$,

当 $t \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ 时, $T'(t) > 0$; 当 $t \in (-1, 1)$ 时, $T'(t) < 0$.

因此, 函数 $T(t)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 1)$ 上单调递减,

在 $(1, 2)$ 上单调递增, 即 $t = -1$ 是极大值点.

10分

由于 $T(-1) = T(2) = 62$, 所以在 10:00 到 14:00 这段时间中,

该物体在 11:00 和 14:00 的温度最高, 最高温度为 62°C .

13分

(3) 解: 根据定义, 平均温度为

$$\frac{1}{4 - (-4)} \int_{-4}^4 T(t) dt = \frac{1}{8} \int_{-4}^4 (t^3 - 3t + 60) dt = 60,$$

即该物体在 8:00 到 16:00 这段时间内的平均温度为 60°C .

16分

22. (18分) 第1小题4分. 第2小题8分. 第三小题6分.

(1) 解: 当 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 2$ 时,
$$\begin{cases} 4B_n - 12A_n = 13n \\ 4B_{n-1} - 12A_{n-1} = 13(n-1) \end{cases}$$

得 $4b_n - 12a_n = 13, 4b_n = 12a_n + 13 = -12n - 5,$

$$b_n = -\frac{12n+5}{4}$$

而 $4b_1 - 12a_1 = 13$, 可得 $b_1 = -\frac{17}{4},$

$\therefore \{b_n\}$ 的通项公式是 $b_n = -\frac{12n+5}{4}$

4分

(2) 解: 抛物线 C_n 的方程为

$$y = a \left(x + \frac{2n+3}{2} \right)^2 - \frac{12n+5}{4},$$

因为 $D_n(0, n^2+1)$ 在此抛物线上, 即得 $a = 1$, 因此, C_n 的方程为

$$y = \left(x + \frac{2n+3}{2} \right)^2 - \frac{12n+5}{4},$$

即 $y = x^2 + (2n+3)x + n^2 + 1$

8分

$\therefore y' = 2x + (2n+3),$

$\therefore D_n$ 处切线斜率 $k_n = 2n+3.$

10分

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{a_n b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n}{\left(-n - \frac{3}{2}\right) \left(-3n - \frac{5}{4}\right)} = \frac{1}{3}$

12分

(3) 解: 对任意 $n \in \mathbb{N}, 2a_n = -2n - 3,$

$$4b_n = -12n - 5 = -2(6n+1) - 3 \in X,$$

$\therefore Y \subseteq X$, 故可得 $X \cap Y = Y.$

15分

$$4b_n = -12n - 5 < -100, \text{ 故 } n > 7\frac{11}{12}, n \in \mathbb{N},$$

\therefore 满足条件的最小自然数 $n = 8.$

故

$$c_1 = 4b_8 = -101,$$

$$\therefore c_n = -101 - 12(n-1) = -12n - 89$$

18分