1998年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷(理工农医类)

考生注意：

本试卷共有22道试题,满分150分。

一、填空题(本大题满分44分)本大题共有11题,只要求直接填写结果,每个空格填对得4分,否则一律得零分。

1. $\lg 20+\log_{100}25=$______。

2. 若函数 $y=2\sin x+\sqrt{a}\cos x+4$ 的最小值为1,则 $a=$______。

3. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+3}{x^3+3}=2$,则 $a=$______。

4. 函数 $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}+2$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=$______。

5. 棱长为2的正四面体的体积为______。

6. 以直角坐标系的原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,若椭圆两焦点的极坐标分别是 $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$、$\left(1,\dfrac{3\pi}{2}\right)$,长轴长是4,则此椭圆的直角坐标方程是______。

7. 袋内装有大小相同的4个白球和3个黑球,从中任意摸出3个球,其中只有一个黑球的概率是______。

8. 函数 $y=\begin{cases}2x+3, & x\leqslant 0\\ x+3, & 0<x\leqslant 1\\ -x+5, & x>1\end{cases}$ 的最大值是______。

9. 设 n 是一个自然数,$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{1}{16}$,则 $n=$______。

10. 在数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$中,$a_1=2$,且对任意自然数 n,$3a_{n+1}-a_n=0$,b_n 是 a_n 与 a_{n+1} 的等差中项,则$\{b_n\}$的各项和是______。

11. 函数 $f(x)=a^x\ (a>0,a\neq 1)$ 在$[1,2]$中的最大值比最小值大 $\dfrac{a}{2}$,则 a 的值为______。

二、选择题(本大题满分20分)本大题共有5题,每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论,其中有且只有一个结论是正确的,必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内,选对得4分,不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内),一律得零分。

12. 下列函数中,周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的偶函数是　　(　　)

(A) $y=\sin 4x$　　(B) $y=\cos^2 2x-\sin^2 2x$

(C) $y=\operatorname{tg}2x$　　(D) $y=\cos 2x$

13. 若 $0<a<1$，则函数 $y=\log_a(x+5)$ 的图象不经过 ( )

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

14. 在下列命题中，假命题是 ( )

(A) 若平面 α 内的一条直线 l 垂直于平面 β 内的任一直线，则 $\alpha\perp\beta$

(B) 若平面 α 内的任一直线平行于平面 β，则 $\alpha/\!/\beta$

(C) 若平面 $\alpha\perp$ 平面 β，任取直线 $l\subset\alpha$，则必有 $l\perp\beta$

(D) 若平面 $\alpha/\!/$ 平面 β，任取直线 $l\subset\alpha$，则必有 $l/\!/\beta$

15. 设全集为 R，$A=\{x\mid x^2-5x-6>0\}$，$B=\{x\mid |x-5|<a\}$（a 是常数），且 $11\in B$，则 ( )

(A) $\overline{A}\cup B=R$　(B) $A\cup\overline{B}=R$　(C) $\overline{A}\cup\overline{B}=R$　(D) $A\cup B=R$

16. 设 a,b,c 分别是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对边的边长，则直线 $\sin A\cdot x+ay+c=0$ 与 $bx-\sin B\cdot y+\sin C=0$ 的位置关系是 ( )

(A) 平行　(B) 重合　(C) 垂直　(D) 相交但不垂直

三、解答题（本大题满分 86 分）本大题共有 6 题，解答下列各题必须写出必要的步骤。

17.（本题满分 8 分）

设 α 是第二象限角，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，求 $\sin\left(\dfrac{37}{6}\pi-2\alpha\right)$ 的值。

[解]

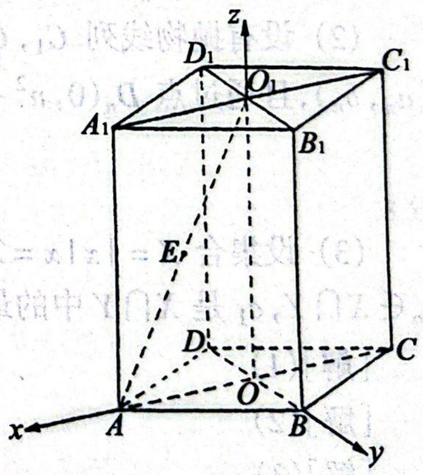
18.（本题满分 12 分）

已知向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所表示的复数 z 满足 $(z-2)i=1+i$，将 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 O 按顺时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{4}$ 得 $\overrightarrow{OZ'}$，设 $\overrightarrow{OZ'}$ 所表示的复数为 z'，求复数 $z'+\sqrt{2}i$ 的辐角主值。

[解]

19.（本题满分 16 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 8 分，第 2 小题满分 8 分。

直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 6，底面是边长为 4，$\angle DAB=60°$ 的菱形，AC 与 BD 相交于 O，A_1C_1 与 B_1D_1 相交于 O_1，E 是 O_1A 的中点。



(1) 求二面角 O_1-BC-D 的大小（用反三角函数表示）；

(2) 分别以射线 OA,OB,OO_1 为 x 轴，y 轴，z 轴的正半轴建立空间直角坐标系，求点 B_1,D_1,E 的坐标，并求异面直线 OB_1 与 D_1E 所成角的大小（用反三角函数表示）。

[解](1)

[解](2)

20.（本题满分 16 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 10 分。

(1) 动直线 $y=a$ 与抛物线 $y^2=\dfrac{1}{2}(x-2)$ 相交于 A 点，动点 B 的坐标是 $(0,3a)$，求线段 AB 中点 M 的轨迹 C 的方程；

(2) 过点 $D(2,0)$ 的直线 l 交上述轨迹 C 于 P、Q 两点，E 点坐标是 $(1,0)$，若 $\triangle EPQ$ 的面

积为4,求直线 l 的倾斜角 α 的值。

[解](1)

[解](2)

21. (本题满分16分)本题共有3个小题,第1小题满分6分,第2小题满分7分,第3小题满分3分。

设某物体一天中的温度 T 是时间 t 的函数:$T(t)=at^3+bt^2+ct+d(a\neq 0)$,其中温度的单位是℃,时间的单位是小时,$t=0$ 表示12:00,t 取正值表示12:00以后。若测得该物体在8:00的温度为8℃,12:00的温度为60℃,13:00的温度为58℃,且已知该物体的温度在8:00和16:00有相同的变化率。

(1) 写出该物体的温度 T 关于时间 t 的函数关系式;

(2) 该物体在10:00到14:00这段时间中(包括10:00和14:00),何时温度最高?并求出最高温度;

(3) 如果规定一个函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2](x_1<x_2)$ 上函数值的平均为 $\dfrac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx$,求该物体在8:00到16:00这段时间内的平均温度。

[解](1)

[解](2)

[解](3)

22. (本题满分18分)本题共有3个小题,第1小题满分4分,第2小题满分8分,第3小题满分6分。

若 A_n 和 B_n 分别表示数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 前 n 项的和,对任意正整数 n,

$$a_n=-\frac{2n+3}{2},4B_n-12A_n=13n。$$

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设有抛物线列 $C_1,C_2,\cdots,C_n,\cdots$,抛物线 $C_n(n\in N)$ 的对称轴平行于 y 轴,顶点为 (a_n,b_n),且通过点 $D_n(0,n^2+1)$,过点 D_n 且与抛物线 C_n 相切的直线斜率为 k_n,求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n}{a_nb_n};$$

(3) 设集合 $X=\{x\mid x=2a_n,n\in N\}$,$Y=\{y\mid y=4b_n,n\in N\}$。若等差数列 $\{c_n\}$ 的任一项 $c_n\in X\cap Y$,c_1 是 $X\cap Y$ 中的最大数,且 $-265<c_{10}<-125$,求 $\{c_n\}$ 的通项公式。

[解](1)

[解](2)

[解](3)

数学试卷答案及评分标准

说明:

1. 本解答列出试题的一种或几种解法,如果考生的解法与所列解法不同,可参照解答中评分标准的精神进行评分。

2. 评阅试卷,应坚持每题评阅到底,不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅,当考生的解

答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分。

3. 第 17 题至第 22 题中右端所注的分数，表示考生正确做到这一步应得的该题的累加分数。

4. 给分或扣分均以 1 分为单位。

一、本题共 44 分。每小题结果正确的给 4 分，否则一律得零分。

1. 2　2. 5　3. 4　4. $(x-2)^3+1, x\in R$　5. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　6. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$　7. $\dfrac{18}{35}$　8. 4　9. 4　10. 2　11. $\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{3}{2}$

二、本题共 20 分。每小题 4 分。

12. B　13. A　14. C　15. D　16. C

三、本题共 86 分。

17.（8 分）解：

$\because$ α 是第二象限角，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore$ $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$　　2分

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25},$$

$$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{25},$$　　5分

$\therefore$ $\sin\left(\dfrac{37}{6}\pi-2\alpha\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos2\alpha-\cos\dfrac{\pi}{6}\sin2\alpha=\dfrac{7+24\sqrt{3}}{50}$　　8分

18.（12 分）解：由 $(z-2)i=1+i$，得

$$z=\frac{1+i}{i}+2=3-i$$　　4分

$$\therefore\ z'=z\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=(3-i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$$　　8分

$$z'+\sqrt{2}i=\sqrt{2}-\sqrt{2}i=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

设 $z'+\sqrt{2}i$ 的辐角主值为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\theta\in[0,2\pi),$$

$\therefore$ $\theta=\dfrac{7\pi}{4}$，即 $\arg(z'+\sqrt{2}i)=\dfrac{7\pi}{4}$　　12分

19.（16 分）每小题各 8 分。

(1) 解：$\because$ $DD_1\perp$ 底面 $ABCD$，$O_1O\parallel D_1D$，$\therefore$ $O_1O\perp$ 底面 $ABCD$

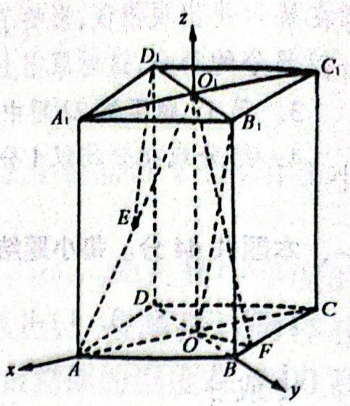
过 O 作 $OF\perp BC$ 交 BC 于 F，连结 O_1F，根据三垂线定理得 $O_1F\perp BC$，

$\therefore$ $\angle O_1FO$ 是二面角 O_1-BC-D 的平面角。　　4分

$$\because\ OC=OA=4\times\cos30^\circ=2\sqrt{3}, OB=OD=2,$$

$$\therefore\ OF=\frac{OC\cdot OB}{BC}=\sqrt{3}$$

$\therefore\quad \mathrm{tg}\angle O_1FO=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$



$\therefore$ 二面角 O_1-BC-D 的大小为 $\mathrm{arctg}2\sqrt{3}$。　　8分

(2) 解:由条件得 O,B_1,D_1,E 的坐标为:

$$O(0,0,0),B_1(0,2,6),$$

$$D_1(0,-2,6),E(\sqrt{3},0,3)$$　　11分

$$\therefore\quad \overrightarrow{OB_1}=\{0,2,6\},\overrightarrow{D_1E}=\{\sqrt{3},2,-3\}$$

记向量 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{D_1E}$ 的夹角为 α,则

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{D_1E}}{|\overrightarrow{OB_1}|\cdot|\overrightarrow{D_1E}|}=-\frac{7\sqrt{10}}{40}$$

由此可得异面直线 OB_1 与 D_1E 所成的角为 $\arccos\frac{7\sqrt{10}}{40}$　　16分

20. (16分)第1小题6分。第2小题10分。

(1) 解:设 M 的坐标为 (x,y),由 A 的坐标为 $(2a^2+2,a)$,B 的坐标为 $(0,3a)$ 得

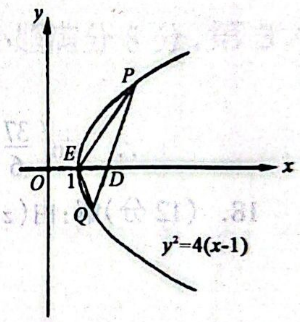
$$\begin{cases}x=a^2+1\\y=2a\end{cases}$$　　3分

$\therefore$ 轨迹 C 的方程为 $x=\frac{y^2}{4}+1$,即 $y^2=4(x-1)$　　6分

(2) 解法一:设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$,因 l 与抛物线有两个交点,故 $k\neq0$,

得 $x=\frac{y}{k}+2$,代入 $y^2=4(x-1)$ 得

$$y^2-\frac{4}{k}y-4=0,$$



$\Delta=\frac{16}{k^2}+16>0$ 恒成立,记这个方程的两实根为 y_1,y_2,则

$$|PQ|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=\frac{4(k^2+1)}{k^2}$$　　10分

又点 E 到直线 l 的距离 $d=\frac{|k\cdot1-0-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$,

$\therefore\quad \triangle EPQ$ 的面积为

$$S_{\triangle EPQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{2\sqrt{k^2+1}}{|k|}$$　　13分

由 $\frac{2\sqrt{k^2+1}}{|k|}=4$ 解得 $k^2=\frac{1}{3}$,　$\therefore\quad k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\quad \alpha=\frac{\pi}{6}$ 或 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$　　16分

(2) 解法二:设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$,代入 $y^2=4(x-1)$,得

$$k^2x^2-(4k^2+4)x+4k^2+4=0,$$

因 l 与抛物线有两个交点,故 $k\neq0$,而 $\Delta=16(k^2+1)>0$ 恒成立,记这个方程的两个实根为 x_1,x_2,因抛物线 $y^2=4(x-1)$ 的焦点是 $D(2,0)$,准线是 $x=0$,所以

$$|PQ|=x_1+x_2=\frac{4(k^2+1)}{k^2}$$　　10分

其余同解法一。

21. (16分)第1小题6分。第2小题7分。第3小题3分。

(1) 解:根据条件可得

$T(0)=60, T(-4)=8, T(1)=58, T'(-4)=T'(4)$, 3分

则 $d=60, b=0, a=1, c=-3$,

因此,温度函数 $T(t)=t^3-3t+60$ 6分

(2) 解:$T'(t)=3t^2-3=3(t-1)(t+1)$,

当 $t\in(-2,-1)\cup(1,2)$ 时,$T'(t)>0$;当 $t\in(-1,1)$ 时,$T'(t)<0$

因此,函数 $T(t)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递增,在 $(-1,1)$ 上单调递减,

在 $(1,2)$ 上单调递增,即 $t=-1$ 是极大值点。 10分

由于 $T(-1)=T(2)=62$,所以在10:00到14:00这段时间中,

该物体在11:00和14:00的温度最高,最高温度为62℃。 13分

(3) 解:根据定义,平均温度为

$$\frac{1}{4-(-4)}\int_{-4}^{4}T(t)\,dt=\frac{1}{8}\int_{-4}^{4}(t^3-3t+60)\,dt=60$$

即该物体在8:00到16:00这段时间内的平均温度为60℃。 16分

22. (18分)第1小题4分。第2小题8分。第3小题6分。

(1) 解: 当 $n\in N$ 且 $n\geqslant 2$ 时,$\begin{cases}4B_n-12A_n=13\\4B_{n-1}-12A_{n-1}=13(n-1)\end{cases}$

得 $4b_n-12a_n=13, 4b_n=12a_n+13=-12n-5$,

$$b_n=-\frac{12n+5}{4}$$

而 $4b_1-12a_1=13$,可得 $b_1=-\frac{17}{4}$,

$\therefore$ $\{b_n\}$ 的通项公式是 $b_n=-\frac{12n+5}{4}$ 4分

(2) 解: 设抛物线 C_n 的方程为

$$y=a\left(x+\frac{2n+3}{2}\right)^2-\frac{12n+5}{4},$$

因为 $D_n(0,n^2+1)$ 在此抛物线上,即得 $a=1$,因此,C_n 的方程为

$$y=\left(x+\frac{2n+3}{2}\right)^2-\frac{12n+5}{4},$$

即 $y=x^2+(2n+3)x+n^2+1$ 8分

$\because$ $y'=2x+(2n+3)$,

$\therefore$ D_n 处切线斜率 $k_n=2n+3$ 10分

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{a_nb_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+4n}{\left(-n-\frac{3}{2}\right)\left(-3n-\frac{5}{4}\right)}=\frac{1}{3}$ 12分

(3) 解: 对任意 $n\in N, 2a_n=-2n-3$,

$$4b_n=-12n-5=-2(6n+1)-3\in X,$$

$\therefore$ $Y\subseteq X$,故可得 $X\cap Y=Y$ 14分

$\because$ c_1 是 $X\cap Y$ 中的最大数, $\therefore$ $c_1=-17$

设等差数列 $\{c_n\}$ 的公差为 d,则

$$c_{10}=-17+9d,$$

$$\therefore\ -265<-17+9d<-125,$$

得 $$-27\frac{5}{9}<d<-12$$ 16分

而 $\{4b_n\}$ 是一个以 -12 为公差的等差数列,

$$\therefore\ d=-12m(m\in N),$$

$$\therefore\ d=-24$$

$\therefore$ $c_n=7-24n(n\in N)$ 18分