1999年全国普通高等学校统一招生考试
数学试题(文史类)(上海卷)

考生注意:本试卷共有22道试题,满分150分.

一、填空题(本大题满分48分)本大题共有12题,只要求直接填写结果,每个空格填对得4分,否则一律得零分.

1. $\operatorname{tg}\left[\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right]=$__________.

2. 函数 $f(x)=\log_2 x+1(x\geqslant 4)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域是__________.

3. 在$(x^3+\dfrac{2}{x^2})^5$的展开式中,含 x^5 项的系数为__________.

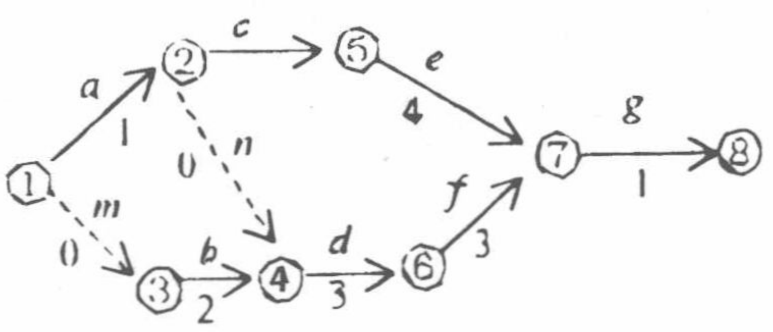
4. 在$\triangle ABC$中,若$\angle B=30°$, $AB=2\sqrt{3}$, $AC=2$,则$\triangle ABC$的面积S是__________.

5. 若平移坐标系,将曲线方程 $y^2+4x-4y-4=0$ 化为标准方程,则坐标原点应移到点 O'(___,___).

6. 函数 $y=2\sin x\cos x-2\sin^2 x+1$ 的最小正周期 $T=$__________.

7. 函数 $y=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})(x\in[-\pi,0])$ 的单调递减区间是__________.

8. 某工程的工序流程图如下(工时单位:天),



现已知工程总时数为10天,则工序 c 所需工时为__________

天.

9. $\dfrac{\log_3 2}{\log_{27}64}=$ ________.

10. 在等差数列$\{a_n\}$中满足 $3a_4=7a_7$, 且 $a_1>0$, S_n 是数列$\{a_n\}$前 n 项的和. 若 S_n 取得最大值, 则 $n=$ ________.

11. 若以连续掷两次骰子分别得到的点数 m、n 作为点P 的坐标, 则点 P 落在圆 $x^2+y^2=16$ 内的概率是________.

12. 若四面体各棱的长是 1 或 2, 且该四面体不是正四面体, 则其体积的值是________(只需写出一个可能的值).

二、选择题(本大题满分 16 分)本大题共有 4 题, 每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得 4 分, 不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内), 一律得零分.

13. 直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 绕原点按逆时针方向旋转 30°后所得直线与圆$(x-2)^2+y^2=3$ 的位置关系是

A. 直线过圆心　　　　B. 直线与圆相交, 但不过圆心

C. 直线与圆相切　　　D. 直线与圆没有公共点

[答](　　)

14. 下列以 t 为参数的参数方程所表示的曲线中, 与方程 $xy=1$ 所表示的曲线完全一致的是

A. $\begin{cases}x=t^{\frac{1}{2}}\\ y=t^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$　　　B. $\begin{cases}x=|t|\\ y=\dfrac{1}{|t|}\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sec t\end{cases}$　　　D. $\begin{cases}x=\operatorname{tg} t\\ y=\operatorname{ctg} t\end{cases}$

[答](　　)

15. 若 $a<b<0$, 则下列结论中正确的是

A. 不等式$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不能成立

B. 不等式$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不能成立

C. 不等式$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$和$(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$均不能成立

D. 不等式$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$和$(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$均不能成立

[答](　　)

16. 设有直线 m、n 和平面 α、β,则在下列命题中,正确的是

A. 若 $m // n, m \subset \alpha, n \subset \beta$,则 $\alpha // \beta$

B. 若 $m \perp \alpha, m \perp n, n \subset \beta$,则 $\alpha // \beta$

C. 若 $m // n, n \perp \beta, m \subset \alpha$,则 $\alpha \perp \beta$

A. 若 $m // n, m \perp \alpha, n \perp \beta$,则 $\alpha \perp \beta$

[答](　　)

三、解答题(本大题满分 86 分)本大题共有 6 题,解答下列各题必须写出必要的步骤.

17. (本题满分 10 分)

设集合 $A=\{x \mid |x-a|<2\}, B=\{x \mid \frac{2x-1}{x+2}<1\}$.若 $A \subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

18. (本题满分 12 分)

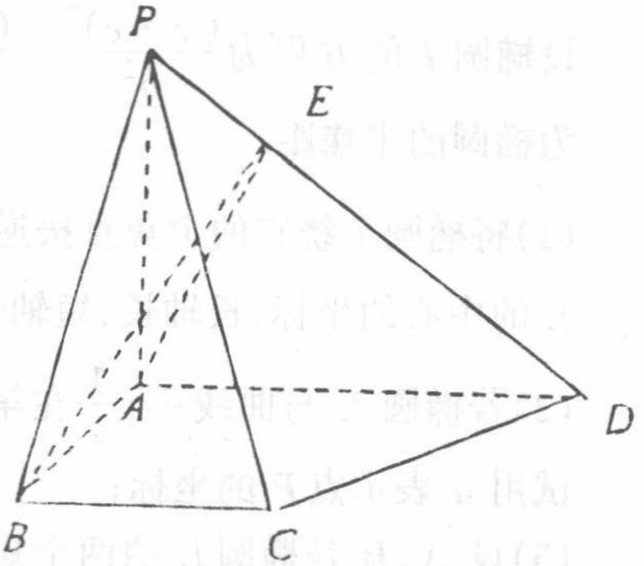
设正数数列$\{a_n\}$为一等比数列,且 $a_2=4$, $a_4=16$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg a_{n+1}+\lg a_{n+2}+\cdots+\lg a_{2n}}{n^2}$.

19. (本题满分 14 分).

设复数 z 满足 $4z+2\bar{z}=3+\sqrt{3}+i$, $w=\sin\theta-i\cos\theta(\theta\in R)$,求 z 的值和$|z-w|$的取值范围.

20. (本题满分 16 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 4 分,第 2 小题满分 12 分.

如图，在四棱锥 $P—ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是一直角梯形，$\angle BAD=90^\circ$，$AD /\!/ BC$，$AB=BC=a$，$AD=2a$，且 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，PD 与底面成 30° 角．



(1)若 $AE\perp PD$，E 为垂足，求证：$BE\perp PD$；

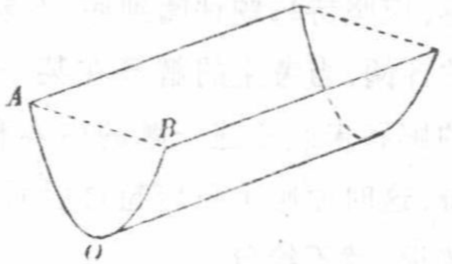
(2)求异面直线 AE 与 CD 所成角的大小(用反三角函数表示)．

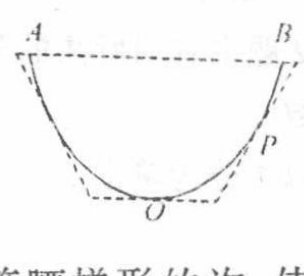
21．(本题满分 16 分)本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 6 分．

平地上有一条水沟，沟沿是两条长 100 米的平行线段，沟宽 AB 为 2 米，与沟沿垂直的平面与沟的交线是一段抛物线，抛物线顶点为 O，对称轴与地面垂直，沟深 1.5 米，沟中水深 1 米．

(1)求水面宽；

(2)如图所示形状的几何体积为柱体．已知柱体的体积为底面积乘以高．问沟中的水有多少立方米?





(3)若要把这条水沟改挖(不准填土)成截面为等腰梯形的沟，使沟的底面与地面平行，则改挖后的沟底宽为多少米时，所挖的土最少?

22．(本题满分 18 分)本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分．

设椭圆 l 的方程为$\frac{(x+c)^2}{b^2}+\frac{(y+c)^2}{a^2}=1$，其中 $a>b>0$，c 为椭圆的半焦距.

(1)将椭圆 l 绕它的上焦点按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$，求所得椭圆 L 的中心的坐标、长轴长、短轴长及其方程；

(2)若椭圆 L 与曲线$y=\frac{1}{x}$在第一象限内只有一个公共点P，试用 a 表示点P 的坐标；

(3)设 A、B 是椭圆L 的两个焦点，当 a 变化时，求$\triangle ABP$ 的面积函数$S(a)$的值域。

答案要点及评分标准

说明

1. 本解答列出试题的一种或几种解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分 .
2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅，当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分 .
3. 第 17 题至第 22 题中右端所注的分数，表示考生正确做到这一步应得的该题的累加分数 .
4. 给分或扣分均以 1 分为单位 .

解答

一、(第 1 题至第 12 题)每一题结果正确的给 4 分，否则一律得零分 .

1.$2-\sqrt{3}$.　　2.$[3,+\infty]$.

3.40.　　4.$2\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$.

5.(2,2).　　6.π.

7. $(-\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{3}\pi)$.　　　8. 4.

9. $\frac{1}{2}$.　　　10. 9.

11. $\frac{2}{9}$.　　　12. $\frac{\sqrt{11}}{12}$; $\frac{\sqrt{14}}{12}$; $\frac{\sqrt{11}}{6}$(三者中的任一个).

二、(第 13 题至 16 题)每一题结果正确的给 4 分．

题　号	13	14	15	16
代　号	C	D	B	C

三、(第 17 题至第 22 题)

17. [解]由 $|x-a|<2$, 得 $a-2<x<a+2$,

$\therefore A=\{x|a-2<x<a+2\}$.　　　……(2 分)

由 $\frac{2x-1}{x+2}<1$, 得 $\frac{x-3}{x+2}<0$, 即 $-2<x<3$,

$\therefore B=\{x|-2<x<3\}$.　　　……(6 分)

$\because A\subseteq B$,

$\therefore \begin{cases} a-2\geqslant -2 \\ a+2\leqslant 3 \end{cases}$, 于是 $0\leqslant a\leqslant 1$.　　　……(10 分)

18. [解]设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 则 $q^2=\frac{a_4}{a_2}=4$, 由 $a_n>0, n\in N$ 得 $q=2$,

于是 $a_1=\frac{a_2}{q}=2$, $a_n=a_1q^{n-1}=2^n$,　　　……(5 分)

因此 $\frac{\lg a_{n+1}+\lg a_{n+2}+\cdots+\lg a_{2n}}{n^2}$

$=\frac{(n+1)\lg 2+(n+2)\lg 2+\cdots 2n\lg 2}{n^2}$

$=\frac{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}{n^2}\lg 2$

$=(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n})\lg 2$,　　　……(10 分)

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg a_{n+1}+\lg a_{n+2}+\cdots+\lg a_{2n}}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n})\lg 2$,

$= \frac{3}{2}\lg 2.$ ……(12 分)

19. [解]设 $z = x + bi$, a、$b \in R$, 则 $\overline{z} = a - bi$,

于是 $4(a+bi) + 2(a-bi) = 3\sqrt{3} + i$, 3 分

即 $6a + 2bi = 3\sqrt{3} + i$,

得 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $\therefore z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. 6 分

$|z - w| = |\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - (\sin\theta - i\cos\theta)|$

$= |(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\theta) + (\frac{1}{2} + \cos\theta)i|$

$= \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\theta)^2 + (\frac{1}{2} + \cos\theta)^2}$ 9 分

$= \sqrt{2 - \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$

$= \sqrt{2 - 2\sin(\theta - \frac{\pi}{6})}$ 12 分

$\because -1 \leqslant \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) \leqslant 1$

$\therefore 0 \leqslant 2 - 2\sin(\theta - \frac{\pi}{6}) \leqslant 4$,

得 $0 \leqslant |z - w| \leqslant 2$. 14 分

20. (1) [证法一] $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp AB$,

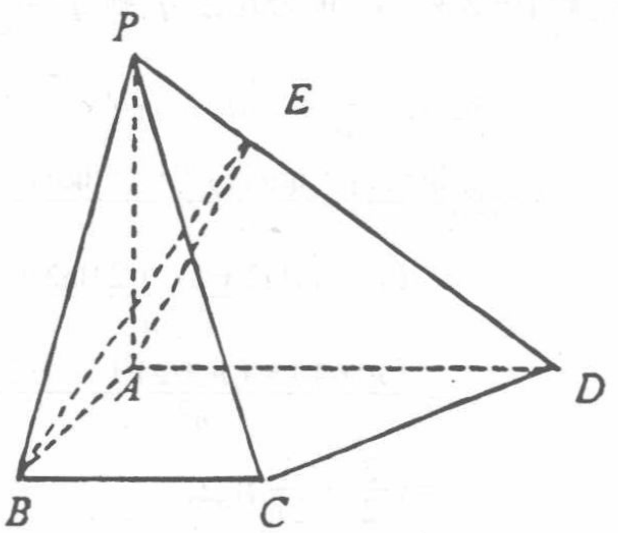
再由 $AB \perp AD$, 得 $AB \perp$ 平面 PAD,

$\therefore AB \perp PD$.

又 $\because AE \perp PD$,

$\therefore PD \perp$ 平面 ABE,

故 $BE \perp PD$; ……(4 分)



(1)[证法二]由题设 $AB \perp AD$, $AB \perp AP$,

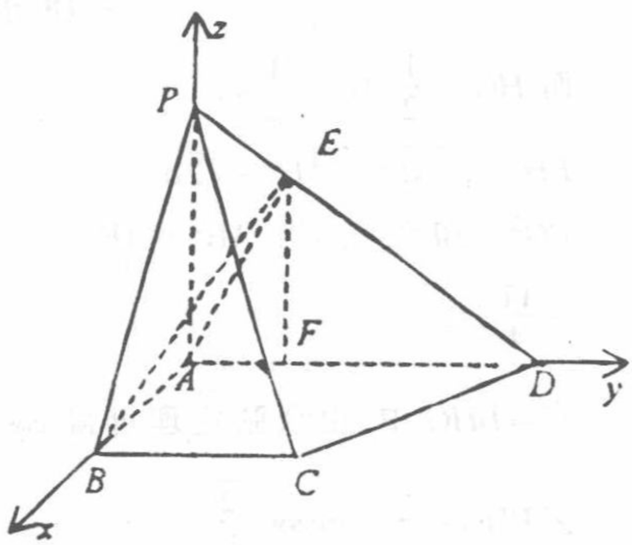
$\therefore AB \perp$ 平面 PAD,

故由 $AB \perp$ 平面 PAD, $AE \perp PD$,

得 $BE\perp PD$； ……(4分)

(2)[解法一]如图，以 A 为原点，AB、AD、AP 所在直线为坐标轴，建立空间直角坐标系， ……(6分)

则点 C、D 的坐标分别为 $(a,a,0)$，$(0,2a,0)$.



$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，

得 $\angle PDA$ 是 PD 与底面 $ABCD$ 所成的角，

$\therefore \angle PDA=30^\circ$，

于是在 $Rt\triangle AED$ 中，由 $AD=2a$，得 $AE=a$. 过 E 作 $EF\perp AD$，垂足为 F，

在 $Rt\triangle AFE$ 中，由 $AE=a$，$\angle EAF=60^\circ$，

得 $AF=\dfrac{1}{2}a$，$EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

$\therefore E(0,\dfrac{1}{2}a,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$. ……(11分)

于是 $\overrightarrow{AE}=\{(0,\dfrac{1}{2}a,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)\}$，$\overrightarrow{CD}=\{-a,a,0\}$. ……(13分)

设 $\overrightarrow{AE}=$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角为 θ，则由

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{0\times(-a)+\frac{1}{2}a\times a+\frac{\sqrt{3}}{2}a\times 0}{\sqrt{0^2+(\frac{1}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}\cdot\sqrt{(-a)^2+a^2+0^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

得 $\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

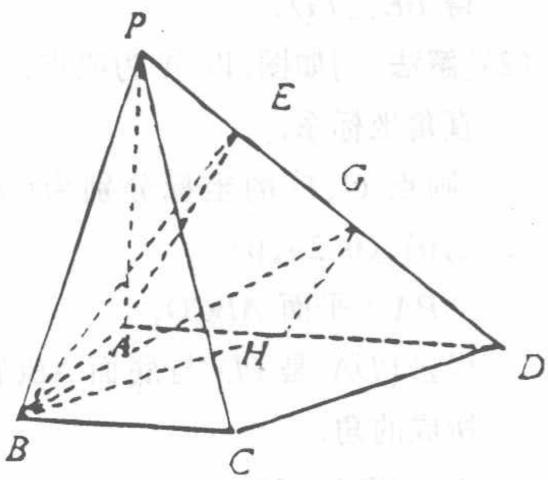
即 AE 与 CD 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ……(16分)

(2)[解法二]如图，设 G、H 分别为 ED、AD 的中点，连结 BH、HG、GB， ……(6分)

易知 $DH \underline{\mathbin{/\!/}} CB$，$\therefore BH\mathbin{/\!/}CD$，

$\because G$、H 分别为 ED、AD 的中点，$\therefore$ $HG // AE$，则 $\angle BHG$ 或它的补角就是异面直线 AE、CD 所成的角.

……(8 分)



而 $HG = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}a$,

$BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{2}a$,

$BG^2 = BE^2 + EG^2 = AB^2 + AE^2 + EG^2$

$= \frac{11}{4}a^2$,

在$\triangle BHG$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle BHG = \frac{BH^2 + HG^2 - BG^2}{2 \cdot BH \cdot HG} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$\angle BHG = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以异面直线 AE、CD 所成角的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.　……(16 分)

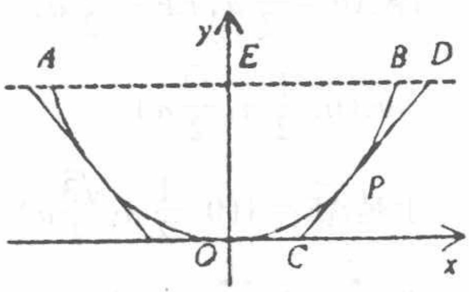
21.(1)[解]如图，建立直角坐标系.

设抛物线的方程为 $y = ax^2$,

则由抛物线过点$(1, \frac{3}{2})$，得 $a = \frac{3}{2}$,

于是抛物线方程为 $y = \frac{3}{2}x^2$.

……(3 分)



当 $y = 1$ 时，$x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$,

由此，水面宽度为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$米；　……(6 分)

(2)[解]水的体积

$V = 2 \cdot 100 \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} (1 - \frac{3}{2}x^2)dx = \frac{400\sqrt{6}}{9}$,

故沟中有$\frac{400\sqrt{6}}{9}$立方米的水；　……(10 分)

(3)[解]为使挖掉的土最少，等腰梯形的两腰必须同抛物线相切.

设切点 $P(t, \frac{3}{2}t^2)(0 < t \leqslant 1)$是抛物线弧 OB 上的一点，过 P 作抛物线

的切线得如图所示的直角梯形 $OCED$,则切线 CD 的方程为:

$y=3t(x-t)+\frac{3}{2}t^2=3tx-\frac{3}{2}t^2$,

于是 $C(\frac{1}{2}t,0),D\left(\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}),\frac{3}{2}\right)$. ……(13 分)

记梯形 $OCDE$ 的面积为 S,

则 $S=\frac{3}{4}(t+\frac{1}{2t}),0<t\leqslant 1$,

当 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,S 取到最小值,此时所挖的土最少,

因此,当所挖掉的土最少时,改挖后的沟底宽为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 米. ……(16 分)

22. (1)[解]椭圆 l 中心的坐标为$(-c,-c)$,上焦点为$(-c,0)$. 2 分

将 l 绕其上焦点按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$,中心正好转到原点,且长轴长为 $2a$,

短轴长为 $2b$,故椭圆 L 的中心坐标为 $O(0,0)$,其方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

6 分

(2)[解]将 $y=\frac{1}{x}$ 代入椭圆方程,得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{b^2x^2}=1$,

化简得 $b^2x^4-a^2b^2x^2+a^2=0$,

得 $ab=2$, 10 分

于是可由方程解得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}},x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$(舍去),

故 P 的坐标为$(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{a})$; 12 分

(3)[解]$\because$ 在$\triangle ABP$ 中,$|AB|=2\sqrt{a^2-b^2}$,高为 $\frac{\sqrt{2}}{a}$,

$\therefore S(a)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-b^2}\frac{\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2(1-\frac{4}{a^4})}$, 14 分

$\because a>b>0,b=\frac{2}{a},\therefore a>\frac{2}{a}$,即 $a>\sqrt{2}$,

得 $0<\frac{4}{a^4}<1$,于是 $0<S(a)<\sqrt{2}$,

故$\triangle ABP$ 的面积函数 $S(a)$的值域为$(0,\sqrt{2})$. 18 分