1999年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷(理工农医类)

一、填空题(本大题满分48分)本大题共有12题,只要求直接填写结果,每个空格填对得4分,否则一律得零分.

1. $\operatorname{tg}\left[\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{6}\right]=$________.

2. 函数$f(x)=\log_2 x+1\ (x\geqslant 4)$的反函数$f^{-1}(x)$的定义域是________.

3. 在$\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^5$的展开式中,含$x^5$项的系数为________.

4. 在$\triangle ABC$中,若$\angle B=30^\circ$, $AB=2\sqrt{3}$, $AC=2$,则$\triangle ABC$的面积S是______.

5. 若平移坐标系,将曲线方程$y^2+4x-4y-4=0$化为标准方程,则坐标原点应移到点O'(　,　).

6. 函数$y=2\sin x\cos x-2\sin^2 x+1$的最小正周期$T=$________.

7. 函数$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ $(x\in[-\pi,0])$的单调递减区间是________.

8. 若将向量$\overrightarrow{a}=\{2,1\}$围绕原点按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$得到向量$\overrightarrow{b}$,则向量$\overrightarrow{b}$的坐标为________.

9. 极坐标方程$5\rho^2\cos 2\theta+\rho^2-24=0$所表示的曲线焦点的极坐标为________.

10. 在等差数列$\{a_n\}$中,满足$3a_4=7a_7$,且$a_1>0$, S_n是数列$\{a_n\}$前n项的和.若S_n取得最大值,则$n=$________.

11. 若以连续掷两次骰子分别得到的点数m、n作为点P的坐标,则点P落在圆$x^2+y^2=16$内的概率是________.

12. 若四面体各棱的长是1或2,且该四面体不是正四面体,则其体积的值是________(只需写出一个可能的值).

二、选择题(本大题满分16分)本大题共有4题,每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论,其中有且只有一个结论是正确的,必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内,选对得4分,不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内),一律得零分.

13. 直线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$绕原点按逆时针方向旋转30°后所得直线与圆$(x-2)^2+y^2=3$的位置关系是……………………(　)

(A) 直线过圆心;

(B) 直线与圆相交,但不过圆心;

(C) 直线与圆相切;

(D) 直线与圆没有公共点.

14. 下列以t为参数的参数方程所表示的曲线中,与方程$xy=1$所表示的曲线完全一致的是……………………(　)

(A) $\begin{cases}x=t^{\frac{1}{2}}\\ y=t^{-\frac{1}{2}};\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x=|t|\\ y=\frac{1}{|t|};\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sec t;\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x=\operatorname{tg} t\\ y=\operatorname{ctg} t.\end{cases}$

15. 若$a<b<0$,则下列结论中正确的是……………………(　)

(A) 不等式$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不能成立;

(B) 不等式$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不能成立;

(C) 不等式$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$和$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$均不能成立;

(D) 不等式 $\frac{1}{|a|} > \frac{1}{|b|}$ 和 $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 > \left(b+\frac{1}{a}\right)^2$ 均不能成立.

16. 设有直线m、n和平面α、β, 则在下列命题中, 正确的是……………………………( )

(A) 若$m/\!/n$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则$\alpha/\!/\beta$;

(B) 若$m\perp\alpha$, $m\perp n$, $n\subset\beta$, 则$\alpha/\!/\beta$;

(C) 若$m/\!/n$, $n\perp\beta$, $m\subset\alpha$, 则$\alpha\perp\beta$;

(D) 若$m/\!/n$, $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, 则$\alpha\perp\beta$.

三、解答题(本大题满分86分) 本大题共有6题, 解答下列各题必须写出必要的步骤.

17. **(本题满分10分)** 设集合 $A=\{x \mid |x-a|<2\}$, $B=\left\{x \,\middle|\, \frac{2x-1}{x+2}<1\right\}$. 若 $A\subseteq B$, 求实数a的取值范围.

18. **(本题满分12分)** 设正数数列$\{a_n\}$为一等比数列, 且$a_2=4$, $a_4=16$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg a_{n+1}+\lg a_{n+2}+\cdots+\lg a_{2n}}{n^2}.$$

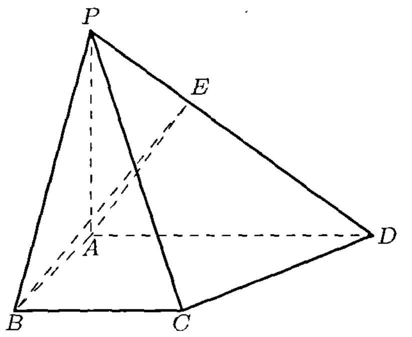
19. **(本题满分14分)** 已知方程$x^2+(4+i)x+4+ai=0$ $(a\in R)$有实根b, 且$z=a+bi$, 求复数$\bar{z}(1-ci)$ $(c>0)$的辐角主值的取值范围.

20. **(本题满分16分)本题共有2个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分12分.**

如图, 在四棱锥$P-ABCD$中, 底面$ABCD$是一直角梯形, $\angle BAD=90°$, $AD/\!/BC$, $AB=BC=a$, $AD=2a$, 且$PA\perp$底面$ABCD$, PD与底面成$30°$角. 若$AE\perp PD$, E为垂足.

(1) 求证: $BE\perp PD$;

(2) 求异面直线AE与CD所成角的大小(用反三角函数表示).



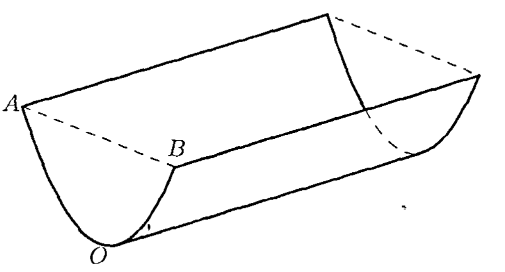
21. **(本题满分16分)本题共有3个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分4分, 第3小题满分6分.**

平地上有一条水沟, 沟沿是两条长100米的平行线段, 沟宽AB为2米, 与沟沿垂直的平面与沟的交线是一段抛物线, 抛物线顶点为O, 对称轴与地面垂直, 沟深1.5米, 沟中水深1米.

(1) 求水面宽;

(2) 如图所示形状的几何体称为柱体. 已知柱体的体积为底面积乘以高. 问沟中的水有多少立方米?

(3) 若要把这条水沟改挖(不准填土)成截面为等腰梯形的沟, 使沟的底面与地面平行, 则改挖后的沟底宽为多少米时, 所挖的土最少?



22. **(本题满分18分)本题共有3个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.**

设椭圆C_1的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 曲线C_2的方程为$y=\frac{1}{x}$, 且C_1与C_2在第一象限内只有一个公共点P.

(1) 试用a表示点P的坐标;

(2) 设A、B是椭圆C_1的两个焦点, 当a变化时, 求$\triangle ABP$的面积函数$S(a)$的值域;

(3) 记$\min\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$为$y_1,y_2,\cdots,y_n$中最小的一个. 设$g(a)$是以椭圆$C_1$的半焦距为边长的正方形的面积, 试求函数$f(a)=\min\{g(a),S(a)\}$的表达式.

答案要点

一、(第1题至第12题)

1. $2-\sqrt{3}$. 2. $[3,+\infty)$.

3. 40. 4. $2\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$.

5. $(2,2)$. 6. π.

7. $\left(-\frac{5}{6}\pi,-\frac{1}{3}\pi\right)$. 8. $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right\}$.

9. $(\sqrt{10},0)$, $(\sqrt{10},\pi)$.

10. 9. 11. $\frac{2}{9}$.

12. $\frac{\sqrt{11}}{12}$; $\frac{\sqrt{14}}{12}$; $\frac{\sqrt{11}}{6}$ (三者中的任一个).

二、(第13题至16题)

13. C. 14. D. 15. B. 16. C.

三、(第17题至第22题)

17. 由$|x-a|<2$, 得$a-2<x<a+2$,

$\therefore A=\{x\mid a-2<x<a+2\}$.

由$\frac{2x-1}{x+2}<1$, 得$\frac{x-3}{x+2}<0$, 即$-2<x<3$,

$\therefore B=\{x\mid -2<x<3\}$.

$\because A\subseteq B$,

$\therefore \begin{cases} a-2\geqslant -2 \\ a+2\leqslant 3, \end{cases}$ 于是$0\leqslant a\leqslant 1$.

18. 设数列$\{a_n\}$的公比为q, 则$q^2=\frac{a_4}{a_2}=4$, 由$a_n>0$, $n\in\mathbf{N}$得$q=2$,

于是$a_1=\frac{a_2}{q}=2$, $a_n=a_1q^{n-1}=2^n$,

因此

$$\begin{aligned}&\frac{\lg a_{n+1}+\lg a_{n+2}+\cdots+\lg a_{2n}}{n^2}\\ &=\frac{(n+1)\lg 2+(n+2)\lg 2+\cdots+2n\lg 2}{n^2}\\ &=\frac{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}{n^2}\lg 2\\ &=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}\right)\lg 2,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\lg a_{n+1}+\lg a_{n+2}+\cdots+\lg a_{2n}}{n^2}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}\right)\lg 2\\ &=\frac{3}{2}\lg 2.\end{aligned}$$

19. $\because$ 方程$x^2+(4+i)x+4+ai=0$ $(a\in\mathbf{R})$有实根b,

$\therefore b^2+(4+i)b+4+ai=0$,

得$b^2+4b+4+(b+a)i=0$,

即有$\begin{cases} b^2+4b+4=0 \\ b+a=0, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=-2, \end{cases}$

得$z=a+bi=2-2i$,

$\therefore \bar{z}(1-ci)=(2+2i)(1-ci)=2+2c+(2-2c)i$.

当$0<c\leqslant 1$时, 复数$\bar{z}(1-ci)$的实部大于0, 虚部不小于0,

$\therefore$ 复数$\bar{z}(1-ci)$的辐角主值在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$范围内,

有$\arg[\bar{z}(1-ci)]=\operatorname{arc\,tg}\frac{2-2c}{2+2c}$

$=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{1+c}-1\right)$.

$\because 0<c\leqslant 1$, $\therefore 0\leqslant\frac{2}{1+c}-1<1$, 有$0\leqslant\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{1+c}-1\right)<\frac{\pi}{4}$,

$\therefore 0\leqslant\arg[\bar{z}(1-ci)]<\frac{\pi}{4}$.

当$c>1$时, 复数$\bar{z}(1-ci)$的实部大于0, 虚部小于0,

$\therefore$ 复数$\bar{z}(1-ci)$的辐角主值在$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$范围内,

有$\arg[\bar{z}(1-ci)]=2\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{2-2c}{2+2c}=2\pi+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{1+c}-1\right)$.

$\because c>1$, $\therefore -1<\frac{2}{1+c}-1<0$, 有$-\frac{\pi}{4}<\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{1+c}-1\right)<0$,

$\therefore \frac{7\pi}{4}<\arg[\bar{z}(1-ci)]<2\pi$.

综上可得复数$\bar{z}(1-ci)$ $(c>0)$的辐角主值的取值范围为

$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$.

20. (1) [证法一] $\because PA\perp$平面$ABCD$, $\therefore PA\perp AB$,

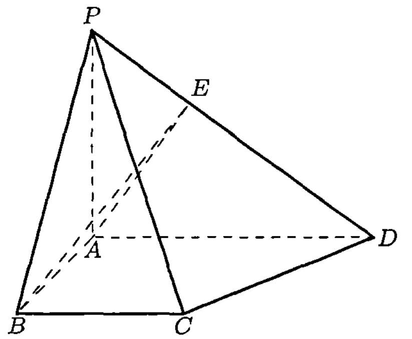
再由$AB\perp AD$, 得$AB\perp$平面PAD,

$\therefore AB\perp PD$.

又$\because AE\perp PD$,

$\therefore PD\perp$平面ABE,

故$BE \perp PD$;

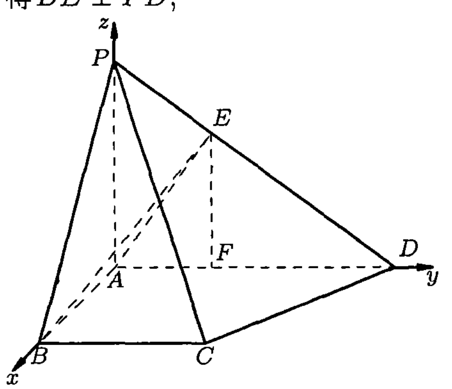


(1) [证法二] 由题设$AB \perp AD$, $AB \perp AP$,

$\therefore AB \perp$平面PAD,

故由$AB \perp$平面PAD, $AE \perp PD$,

得$BE \perp PD$;



(2) [解法一] 如图, 以A为原点, AB、AD、AP所在直线为坐标轴, 建立空间直角坐标系,

则点C、D的坐标分别为$(a,a,0)$,$(0,2a,0)$.

$\because PA \perp$平面$ABCD$,

得$\angle PDA$是PD与底面$ABCD$所成的角,

$\therefore \angle PDA = 30°$,

于是在Rt$\triangle AED$中, 由$AD=2a$, 得$AE=a$.

过E作$EF \perp AD$, 垂足为F,

在Rt$\triangle AFE$中, 由$AE=a$, $\angle EAF=60°$,

得$AF=\frac{1}{2}a$, $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore E\left(0,\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

于是$\overrightarrow{AE}=\left\{0,\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right\}$,

$\overrightarrow{CD}=\{-a,a,0\}$.

设$\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{CD}$的夹角为θ, 则由

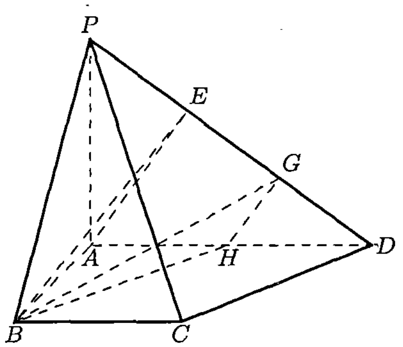
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{CD}|}$$

$$=\frac{0\times(-a)+\frac{1}{2}a\times a+\frac{\sqrt{3}}{2}a\times 0}{\sqrt{0^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}\sqrt{(-a)^2+a^2+0^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

得$\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$,

即AE与CD所成角的大小为$\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.



(2) [解法二] 如图, 设G、H分别为ED、AD的中点, 连结BH、HG、GB,

易知$DH \stackrel{//}{=} CB$, $\therefore BH // CD$,

$\because G$、H分别为ED、AD的中点,

$\therefore HG // AE$,

则$\angle BHG$或它的补角就是异面直线AE、CD所成的角.

而$HG=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}a$,

$BH=\sqrt{AB^2+AH^2}=\sqrt{2}a$,

$BG^2=BE^2+EG^2=AB^2+AE^2+EG^2=\frac{11}{4}a^2$,

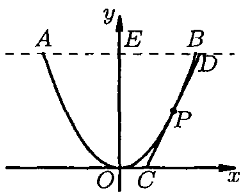
在$\triangle BHG$中, 由余弦定理可得$\cos\angle BHG$

$$=\frac{BH^2+HG^2-BG^2}{2\cdot BH\cdot HG}=-\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$\angle BHG=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

所以异面直线AE、CD所成角的大小为

$\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



21.(1) 如图, 建立直角坐标系. 设抛物线的方程为$y=ax^2$,

则由抛物线过点$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$, 得$a=\dfrac{3}{2}$,

于是抛物线方程为$y=\dfrac{3}{2}x^2$.

当$y=1$时, $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

由此, 水面宽为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$米;

(2) 水的体积

$$V=2\cdot100\cdot\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(1-\frac{3}{2}x^2\right)dx$$

$$=\frac{400\sqrt{6}}{9},$$

故沟中有$\dfrac{400\sqrt{6}}{9}$立方米的水;

(3) 为使挖掉的土最少, 等腰梯形的两腰必须同抛物线相切.

设切点$P\left(t,\dfrac{3}{2}t^2\right)$ $(0<t\leqslant1)$是抛物线弧OB上的一点,

过P作抛物线的切线得如图所示的直角梯形$OCDE$, 则切线CD的方程为:

$$y=3t(x-t)+\frac{3}{2}t^2=3tx-\frac{3}{2}t^2,$$

于是$C\left(\dfrac{1}{2}t,0\right)$, $D\left(\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right),\dfrac{3}{2}\right)$.

记梯形$OCDE$的面积为S,

则$S=\dfrac{3}{4}\left(t+\dfrac{1}{2t}\right)$, $0<t\leqslant1$,

当$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时, S取到最小值, 此时所挖的土最少,

因此, 当所挖掉的土最少时, 改挖后的沟底宽为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$米.

22. (1) 将$y=\dfrac{1}{x}$代入椭圆方程, 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{b^2x^2}=1,$$

化简得

$$b^2x^4-a^2b^2x^2+a^2=0,$$

由条件, 有

$$\triangle=a^4b^4-4a^2b^2=0,$$

得$ab=2$, 于是可由方程解得$x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $x=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$(舍去).

故P的坐标为$\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right)$;

(2) $\because$在$\triangle ABP$中, $|AB|=2\sqrt{a^2-b^2}$, 高为$\dfrac{\sqrt{2}}{a}$,

$$\therefore S(a)=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{a^2-b^2}\frac{\sqrt{2}}{a}$$

$$=\sqrt{2\left(1-\frac{4}{a^4}\right)}.$$

$\because a>b>0$, $b=\dfrac{2}{a}$,

$\therefore a>\dfrac{2}{a}$, 即$a>\sqrt{2}$,

得$0<\dfrac{4}{a^4}<1$, 于是$0<S(a)<\sqrt{2}$, 故$\triangle ABP$的面积函数$S(a)$的值域为$(0,\sqrt{2})$;

(3) $g(a)=c^2=a^2-b^2=a^2-\dfrac{4}{a^2}$, 解不等式

$$g(a)\geqslant S(a),$$

即

$$a^2-\frac{4}{a^2}\geqslant\sqrt{2\left(1-\frac{4}{a^4}\right)},$$

整理得

$$a^8-10a^4+24\geqslant0,$$

即

$$(a^4-4)(a^4-6)\geqslant0,$$

解得$a\leqslant\sqrt{2}$(舍去), 或$a\geqslant\sqrt[4]{6}$,

故$f(a)=\min\{g(a),S(a)\}$

$$=\begin{cases}a^2-\dfrac{4}{a^2}, & \sqrt{2}<a\leqslant\sqrt[4]{6}\\ \sqrt{2\left(1-\dfrac{4}{a^4}\right)}, & a>\sqrt[4]{6}.\end{cases}$$