

1999 年普通高等学校招生 全国统一考试数学试题(广东卷)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3 至 8 页。共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷 (选择题共 60 分)

注意事项:

1. 答第 I 卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目、试卷类型(A 或 B)用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案,不能答在试题卷上。
3. 考试结束,监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式:

三解函数的积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底面周长, l 表示斜高或母线长

台体的体积公式

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$$

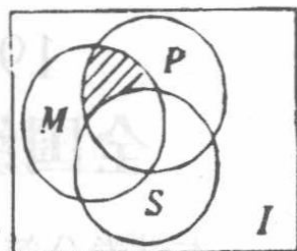
其中 S' 、 S 分别表示上、下底面积, h 表示高

一、选择题:本大题共 12 小题;每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- (1)如图, I 是全集, M 、 P 、 S 是 I 的 3 个子集,则阴影部分所表示的集合是

A. $(M \cap P) \cap S$ B. $(M \cap P) \cup S$

C. $(M \cap P) \cap \bar{S}$ D. $(M \cap P) \cup \bar{S}$



(2) 已知映射 $f: A \rightarrow B$, 其中, 集合 $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象, 且对任意的 $a \in A$, 在 B 中和它对应的元素是 $|a|$, 则集合 B 中元素的个数是

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

(3) 若函数 $y = f(x)$ 的反函数是 $y = g(x)$, $f(a) = b$, $ab \neq 0$, 则 $g(b)$ 等于

- A. a B. a^{-1} C. b D. b^{-1}

(4) 函数 $f(x) = M \sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[a, b]$ 上是增函数, 且 $f(a) = -M$, $f(b) = M$, 则函数 $g(x) = M \cos(\omega x + \phi)$ 在 $[a, b]$ 上

- A. 是增函数 B. 是减函数
C. 可以取得最大值 M D. 可以取得最小值 $-M$

(5) 若 $f(x) \sin x$ 是周期为 π 的奇函数, 则 $f(x)$ 可以是

- A. $\sin x$ B. $\cos x$ C. $\sin 2x$ D. $\cos 2x$

(6) 在极坐标系中, 曲线 $\rho = 4 \sin(\theta - \frac{\pi}{3})$ 关于

- A. 直线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 轴对称 B. 直线 $\theta = \frac{5}{6}\pi$ 轴对称
C. 点 $(2, \frac{\pi}{3})$ 中心对称 D. 极点中心对称

(7) 若干毫升水倒入底面半径为 2cm 的圆柱形器皿中, 量得水面的高度为 6cm. 若将这些水倒入轴截面是正三角形的倒圆锥形器皿中, 则水面的高度是

- A. $6\sqrt{3}$ cm B. 6cm C. $2\sqrt[3]{18}$ cm D. $3\sqrt[3]{12}$ cm

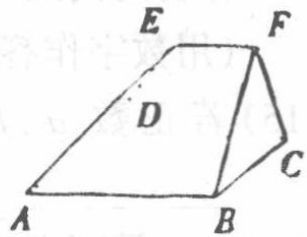
(8) 若 $(2x + \sqrt{3})^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, 则 $(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2$ 的值为

A. -1 B. 1 C. 0 D. 2

(9) 直线 $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ 截圆 $x^2 + y^2 = 4$ 得的劣弧所对的圆心角为

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

(10) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, $EF \parallel AB$, $EF = \frac{3}{2}$, EF 与面 AC 的距离为 2, 则该多面体的体积为



A. $\frac{9}{2}$ B. 5 C. 6 D. $\frac{15}{2}$

(11) 若 $\sin\alpha > \operatorname{tg}\alpha > \operatorname{ctg}\alpha$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 则 $\alpha \in$

A. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ B. $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ C. $(0, \frac{\pi}{4})$ D. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

(12) 某电脑用户计划使用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘. 根据需要, 软件至少买 3 片, 磁盘至少买 2 盒, 则不同的选购方式共有

A. 5 种 B. 6 种 C. 7 种 D. 8 种

第 II 卷 (非选择题共 90 分)

注意事项:

- 第 II 卷共 6 页, 用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.
- 答卷前将密封线内的项目填写清楚, 并在试卷右上角填上座位号.

二、填空题: 本大题共 4 小题; 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

(13) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 F_1 , 右准线为 l_1 若

- 经过 F , 且垂直于 x 轴的弦长等于点 F_1 到 l_1 的距离, 则椭圆的离心率为_____.
- (14) 在一块并排 10 垄的田地中, 选择 2 垄分别种植 A 、 B 两种作物, 每种作物种植一垄. 为有利于作物生长, 要求 A 、 B 两种作物的间隔不小于 6 垄, 则不同的选垄方法共有_____种 (用数字作答).
- (15) 若正数 a 、 b 满足 $ab = a + b + 3$, 则 ab 的取值范围是_____.
- (16) α 、 β 是两个不同的平面, m 、 n 是平面 α 及 β 之外的两条不同直线. 给出四个论断:
- ① $m \perp n$ ② $\alpha \perp \beta$ ③ $n \perp \beta$ ④ $m \perp \alpha$
- 以其中三个论断作为条件, 余下一个论断作为结论, 写出你认为正确的一个命题:

三、解答题: 本大题共 6 小题; 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 10 分)
解方程 $\sqrt{3\lg x - 2} - 3\lg x + 4 = 0$.

(18) (本小题满分 12 分)

设复数 $z = 3\cos\theta + i \cdot 2\sin\theta$. 求函数 $y = \operatorname{tg}(\theta - \operatorname{arg} z)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 的最大值以及对应的 θ 值.

(19) (本小题满分 12 分)

如图, 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 点 E 在棱 D_1D 上, 截面 $EAC \parallel D_1B$, 且面 EAC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 45° , $AB = a$.

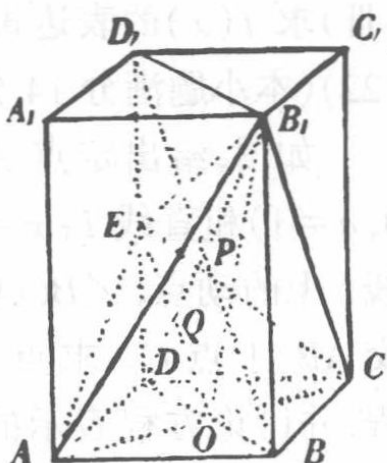
- (I) 求截面 EAC 的面积;
- (II) 求异面直线 A_1B_1 与 AC 之间的距离;
- (III) 求三棱锥 $B_1 - EAC$ 的体积.

(20)(本小题满分 12 分)

右图为一台冷轧机的示意图. 冷轧机由若干对轧辊组成, 带钢从一端输入, 经过各对轧辊逐步减薄后输出.

(I) 输入带钢的厚度为 α , 输出带钢的厚度为 β , 若每对轧辊的减薄率不超过 r_0 . 问冷轧机至少需要安装多少对轧辊?

(一对轧辊减薄率 = $\frac{\text{输入该对的带钢厚度} - \text{从该对输出的带钢厚度}}{\text{输入该对的带钢厚度}}$)



(II) 已知一台冷轧机共有 4 对减薄率为 20% 的轧辊, 所有轧辊周长均为 1600mm. 若第 κ 对轧辊有



缺陷, 每滚动一周在带钢上压出一个疵点, 在冷轧机输出的带钢上, 疵点的间距为 L_κ . 为了便于检修, 请计算 L_1, L_2, L_3 并填入下表(轧钢过程中, 带钢宽度不变, 且不考虑损耗).

轧辊序号 κ	1	2	3	4
疵点间距 L_κ (单位): mm)				1600

(21)(本小题满分 14 分)

已知函数 $y = f(x)$ 的图像是自原点出发的一条折线. 当 $n \leq y \leq n+1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 时, 该图像是斜率为 b^n 的线段(其中正常数 $b \neq 1$). 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x(x_n) = n$ ($n = 1, 2, \dots$) 定义.

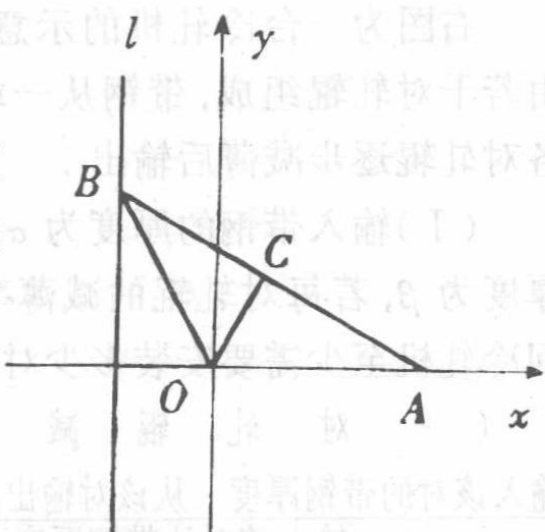
(I) 求 x_1, x_2 和 x_n 的表达式;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

(Ⅲ)求 $f(x)$ 的表达式,并写出其定义域.

(22)(本小题满分 14 分)

如图,给出定点 $A(a, 0)$ ($a > 0, a \neq 1$) 和直线 $l: x = -1$. B 是直线 l 上的动点, $\angle BOA$ 的角平分线交 AB 于点 C . 求点 C 的轨迹方程,并讨论方程表示的曲线类型与 a 值的关系.



答案要点及评分标准

说明

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力,并给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二、对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

三、解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数.选择题和填空题不给中间分.

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.每小题 5 分,满分 60 分.

A 型卷答案

(1)C (2)A (3)A (4)C (5)B

(6)B (7)B (8)A (9)C (10)D

(11)B (12)C

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.每小题 4 分,满分 16 分.

(13) $\frac{1}{2}$ (14)12 (15) $[9, +\infty)$

(16) $m \perp a, n \perp \beta, \alpha \perp \beta \Rightarrow m \perp n$ 或 $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

三、解答题

(17) 本小题主要考查对数方程、无理方程的解法和运算能力。满分 10 分。

解：设 $\sqrt{3\lg x - 2} = y$ ，原方程化为

$$x - y^2 + 2 = 0$$

解得 $y = -1, y = 2$ 。……4 分

因为 $\sqrt{3\lg x - 2} \geq 0$ ，所以将 $y = -1$ 舍去。……6 分

由 $\sqrt{3\lg x - 2} = 2$ ，

得 $\lg x = 2$ ，

$\therefore x = 100$ 。……9 分

经检验， $x = 100$ 为原方程的解。……10 分

(18) 本小题主要考查复数的基本概念、三角公式和不等式等基础知识，考查综合运用所学数学知识解决问题的能力。满分 12 分。

解：由 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 得 $\operatorname{tg} \theta > 0$ 。

由 $z = 3\cos\theta + i \cdot 2\sin\theta$ 得 $\operatorname{tg}(\arg z) = \frac{2\sin\theta}{3\cos\theta} = \frac{2}{3}\operatorname{tg}\theta$ 。

故 $\operatorname{tgy} = \operatorname{tg}(\theta - \arg z)$

$$= \frac{\operatorname{tg}\theta - \frac{2}{3}\operatorname{tg}\theta}{1 + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{\operatorname{tg}\theta} + 2\operatorname{tg}\theta}$$

$\therefore \frac{3}{\operatorname{tg}\theta} + 2\operatorname{tg}\theta \geq 2\sqrt{6}$ ，

$\therefore \frac{1}{\frac{3}{\operatorname{tg}\theta} + 2\operatorname{tg}\theta} \leq \frac{\sqrt{6}}{12}$ 。……8 分

当且仅当 $\frac{3}{\operatorname{tg}\theta} = 2\operatorname{tg}\theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 时，即 $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，上式取等号。

所以当 $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，函数 y 取得最大值 $\frac{\sqrt{6}}{12}$ 。……12 分

(19)本小题主要考查空间线面关系、二面角和距离的概念, 逻辑思维能力、空间想象能力及运算能力. 满分 12 分.

(I)解:如图, 连结 DB 交 AC 于 O , 连结 EO .

\because 底面 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore DO \perp AC$.

又 $\because ED \perp$ 底面 AC ,

$\therefore EO \perp AC$.

$\therefore \angle EOD$ 是面 EAC 与底面 AC 所成二面角的平面角, ……2 分

$\therefore \angle EOD = 45^\circ$.

$$DO = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad AC = \sqrt{2}a, \quad EO = \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \sec 45^\circ = a,$$

$$\text{故 } S_{\triangle EAC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2.$$

(II)解:由题设 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱, 得 $A_1A \perp$ 底面 AC , $A_1A \perp AC$.

又 $A_1A \perp A_1B_1$,

$\therefore A_1A$ 是异面直线 A_1B_1 与 AC 间的公垂线. ……6 分

$\because D_1B \parallel$ 面 EAC , 且面 D_1BD 与面 EAC 交线为 EO ,

$\therefore D_1B \parallel EO$.

又 O 是 DB 的中点,

$\therefore E$ 是 D_1D 的中点, $D_1B = 2EO = 2a$.

$$\therefore D_1D = \sqrt{D_1B^2 - DB^2} = \sqrt{2}a.$$

异面直线 A_1B_1 与 AC 间的距离为 $\sqrt{2}a$. ……8 分

(III)解法一:如图, 连结 D_1B_1 .

$\because D_1D = DB = \sqrt{2}a$,

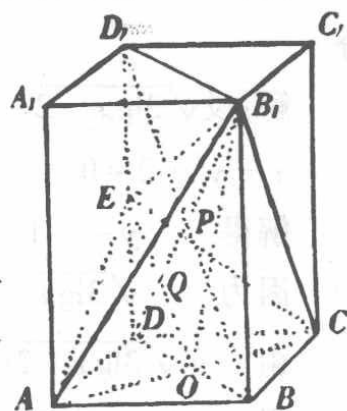
$\therefore BDD_1B_1$ 是正方形.

连结 B_1D 交 D_1B 于 P , 交 EO 于 Q .

$\because B_1D \perp D_1B$, $EO \parallel D_1B$,

$\therefore B_1D \perp EO$.

又 $AC \perp EO$, $AC \perp ED$.



$\therefore AC \perp \text{面 } BDD_1B_1,$

$\therefore B_1D \perp \text{面 } EAC.$

$\therefore B_1Q$ 是三棱锥 $B_1 - EAC$ 的高.

……10分

由 $DQ = PQ$, 得 $B_1Q = \frac{3}{4}B_1D = \frac{3}{2}a.$

$$\therefore V_{B_1 - EAC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a^3.$$

所以三棱锥 $B_1 - EAC$ 的体积是 $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3.$

……12分

解法二: 连结 B_1O , 则 $V_{B_1 - EAC} = 2V_{A - EOB_1}.$

……10分

$\therefore AO \perp \text{面 } BDD_1B_1,$

$\therefore AO$ 是三棱锥 $A - EOB_1$ 的高, $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$

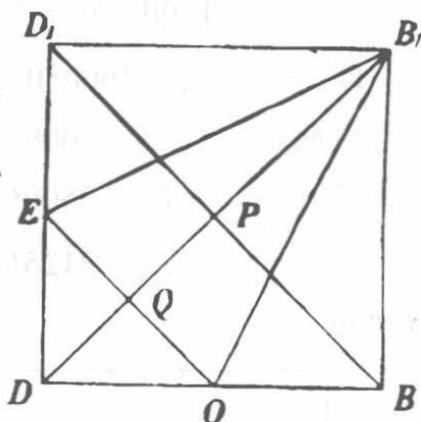
在正方形 BDD_1B_1 中, E, O 分别是 D_1D, DB 的中点(如右图), 则

$$S_{\triangle EOB_1} = \frac{3}{4}a^2.$$

$$\therefore V_{B_1 - EAC} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{4}a^3.$$

所以三棱锥 $B_1 - EAC$ 的体积是 $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3.$

……12分



(20) 本小题主要考查等比数列、对数计算等基本知识, 考查综合运用数学知识和方法解决实际问题的能力. 满分 12 分.

(I) 解: 厚度为 α 的带钢经过减薄率均为 r_0 的 n 对轧辊后厚度为 $\alpha(1 - r_0)^n.$

为使输出带钢的厚度不超过 β , 冷轧机的轧辊数(以对为单位)应满足

$$\alpha(1 - r_0)^n \leq \beta,$$

即 $(1 - r_0)^n \leq \frac{\beta}{\alpha}.$

……3分

由于 $(1 - r_0)^n > 0, \frac{\beta}{\alpha} > 0$, 对上式两端取对数, 得

$$n \lg(1 - r_0) \leq \lg \frac{\beta}{\alpha},$$

由于 $\lg(1 - r_0) < 0$, 所以

$$n \geq \frac{\lg \beta - \lg \alpha}{\lg(1-r_0)}$$

因此,至少需要安装不小于 $\frac{\lg \beta - \lg \alpha}{\lg(1-r_0)}$ 的整数对轧辊. ……6分

(II)解法一:第 κ 对轧辊出口处疵点间距离为轧辊周长,在此处出口的两疵点间带钢的体积为

$$1600 \cdot \alpha (1-r)^\kappa \cdot \text{宽度} \quad (\text{其中 } r=20\%),$$

而在冷轧机出口处两疵点间带钢的体积为

$$L_\kappa \cdot \alpha (1-r)^4 \cdot \text{宽度}.$$

因宽度相等,且无损耗,由体积相等得

$$1600 \cdot \alpha (1-r)^\kappa = L_\kappa \cdot \alpha (1-r)^4 \quad (r=20\%),$$

即 $L_\kappa = 1600 \cdot 0.8^{\kappa-4}$. ……9分

由此得 $L_3 = 2000(\text{mm}),$

$$L_2 = 2500(\text{mm}),$$

$$L_1 = 3125(\text{mm}).$$

填表如下

	1	2	3	4
疵点间距 $L_\kappa(\text{mm})$	3125	2500	2000	1600

……12分

解法二:第3对轧辊出口疵点间距离为轧辊周长,在此处出口的两疵点间带钢体积与冷轧机出口处两疵点间带钢体积相等.因宽度不变,有

$$1600 = L_3 \cdot (1-0.2),$$

所以 $L_3 = \frac{1600}{0.8} = 2000(\text{mm}).$ ……9分

同理 $L_2 = \frac{L_3}{0.8} = 2500(\text{mm}),$

$$L_1 = \frac{L_2}{0.8} = 3125(\text{mm}).$$

填表如下

	1	2	3	4
疵点间距 $L_k(\text{mm})$	3125	2500	2000	1600

……12分

(21)本小题主要考查函数的基本概念、等比数列、数列极限的基础知识,考查归纳、推理和综合的能力,满分14分.

(I)解:依题意 $f(0)=0$, 又由 $f(x_1)=1$, 当 $0 \leq y \leq 1$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的图像是斜率为 $b^0=1$ 的线段, 故由

$$\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}=1 \quad \text{得} \quad x_1=1. \quad \text{……2分}$$

又由 $f(x_2)=2$, 当 $1 \leq y \leq 2$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的图像是斜率为 b 的线段, 故由

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=b, \quad \text{即} \quad x_2-x_1=\frac{1}{b} \quad \text{得} \quad x_2=1+\frac{1}{b}.$$

……3分

记 $x_0=0$. 由函数 $y=f(x)$ 图像中第 n 段线段的斜率为 b^{n-1} , 故得

$$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=b^{n-1}.$$

$$\text{又} \quad f(x_n)=n, \quad f(x_{n-1})=n-1,$$

$$\therefore \quad x_n-x_{n-1}=\left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}, \quad n=1, 2, \dots.$$

由此知数列 $|x_n-x_{n-1}|$ 为等比数列, 其首项为 1, 公比为 $\frac{1}{b}$.

因 $b \neq 1$, 得

$$x_n = \sum_{\kappa=1}^n (x_{\kappa} - x_{\kappa-1})$$

$$1 + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b^{n-1}} = \frac{b - \left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}}{b-1},$$

$$\text{即} \quad x_n = \frac{b - \left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}}{b-1}.$$

……6分

$$\text{(II)解: 由(I)知} \quad x_n = \frac{b - \left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}}{b-1}.$$

当 $b > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - (\frac{1}{b})^{n-1}}{b-1} = \frac{b}{b-1}$;

当 $0 < b < 1$ 时, $n \rightarrow \infty$, x_n 也趋于无穷大, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.9分

(Ⅲ)解:由(I)知:

当 $0 \leq y \leq 1$ 时, $y = x$, 即当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$;

当 $n \leq y \leq n+1$, 即 $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ 时, 由(I)可知,

$$f(x) = n + b^n(x - x_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad \dots\dots 12 \text{分}$$

由(Ⅱ)知:

当 $b > 1$ 时, $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, \frac{b}{b-1})$; 当 $0 < b < 1$ 时, $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(22)本小题主要考查曲线与方程, 直线和圆锥曲线等基础知识, 以及求动点轨迹的基本技能和综合运用数学知识解决问题的能力, 满分 14 分.

解法一:依题意, 记 $B(-1, b) (b \in R)$, 则直线 OA 和 OB 的方程分别为 $y = 0$ 和 $y = -bx$.

设点 $C(x, y)$, 则有 $0 \leq x < a$, 由 OC 平分 $\angle AOB$, 知点 C 到 OA 、 OB 距离相等. 根据点到直线的距离公式得 $|y| = \frac{|y + bx|}{\sqrt{1 + b^2}}$. ①.....4分

依题设, 点 C 在直线 AB 上, 故有

$$y = -\frac{b}{1+a}(x-a) \quad \dots\dots 6 \text{分}$$

由 $x - a \neq 0$, 得 $b = -\frac{(1+a)y}{x-a}$. ②

将②式代入①式得

$$y^2 \left[1 + \frac{(1+a)^2 y^2}{(x-a)^2} \right] = \left[y - \frac{(1+a)xy}{x-a} \right]^2,$$

整理得 $y^2 [(1-a)x^2 - 2ax + (1+a)y^2] = 0$9分

若 $y \neq 0$, 则 $(1-a)x^2 - 2ax + (1+a)y^2 = 0 (0 < x < a)$.

若 $y = 0$, 则 $b = 0$, $\angle AOB = \pi$, 点 C 的坐标为 $(0, 0)$, 满足上式.

综上得点 C 的轨迹方程为

$$(1-a)x^2 - 2ax + (1+a)y^2 = 0 (0 \leq x < a). \quad \dots\dots 10 \text{分}$$

$\because a \neq 1$,

$$\therefore \frac{(x - \frac{a}{1-a})^2}{(\frac{a}{1-a})^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{1-a^2}} = 1 (0 \leq x < a). \quad \textcircled{3} \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

由此知, 当 $0 < a < 1$ 时, 方程③表示椭圆弧段;

当 $a > 1$ 时, 方程③表示双曲线一支的弧段.

$\dots\dots 14 \text{ 分}$

解法二: 如图, 设 D 是 l 与 x 轴的交点, 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴, E 是垂足.

(i) 当 $|BD| \neq 0$ 时, 设点 $C(x, y)$, 则 $0 < x < a, y \neq 0$.

由 $CE \parallel BD$ 得 $|BD| = \frac{|CE| \cdot |DA|}{|EA|} = \frac{|y|}{a-x}(1+a).$ $\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\therefore \angle COA = \angle COB = \angle COD - \angle BOD = \pi - \angle COA - \angle BOD,$$

$$\therefore 2\angle COA = \pi - \angle BOD.$$

$$\therefore \operatorname{tg}(2\angle COA) = \frac{2\operatorname{tg}\angle COA}{1 - \operatorname{tg}^2\angle COA}, \operatorname{tg}(\pi - \angle BOD) = -\operatorname{tg}\angle BOD,$$

$\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$\operatorname{tg}\angle COA = \frac{|y|}{x}, \operatorname{tg}\angle BOD = \frac{|BD|}{|OD|}$$

$$= \frac{|y|}{a-x}(1+a).$$

$$\therefore \frac{2 \cdot \frac{|y|}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{|y|}{a-x}(1+a),$$

整理得 $(1-a)x^2 - 2ax + (1+a)y^2 = 0 (0 < x < a).$ $\dots\dots 9 \text{ 分}$

(ii) 当 $|BD| = 0$ 时, $\angle BOA = \pi$, 则点 C 的坐标为 $(0, 0)$, 满足上式.

综合(i), (ii), 得点 C 的轨迹方程为

$$(1-a)x^2 - 2ax + (1+a)y^2 = 0 (0 \leq x < a). \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

以下同解法一.

