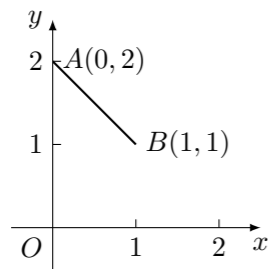


2000 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

- 已知向量 $\vec{OA} = (-1, 2)$ 、 $\vec{OB} = (3, m)$, 若 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, 则 $m =$ _____.
- 函数 $y = \log_2 \frac{2x-1}{3-x}$ 的定义域为_____.
- 圆锥曲线 $\begin{cases} x = 4 \sec \theta + 1, \\ y = 3 \tan \theta, \end{cases}$ 的焦点坐标是_____.
- 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^n =$ _____.
- 已知 $f(x) = 2^x + b$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $y = f^{-1}(x)$ 的图象经过点 $Q(5, 2)$, 则 $b =$ _____.
- 根据上海市人大十一届三次会议上的市政府工作报告, 1999 年上海市完成 GDP (GDP 是指国内生产总值) 4035 亿元, 2000 年上海市 GDP 预期增长 9%, 市委、市府提出本市常住人口每年的自然增长率将控制在 0.08%, 若 GDP 与人口均按这样的速度增长, 则要使本市年人均 GDP 达到或超过 1999 年的 2 倍, 至少需_____年.
按: 1999 年本市常住人口总数约 1300 万.
- 命题 A: 底面为正三角形, 且顶点在底面的射影为底面中心的三棱锥是正三棱锥, 命题 A 的等价命题 B 可以是: 底面为正三角形, 且_____的三棱锥是正三棱锥.
- 设函数 $y = f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数, 它在区间 $[0, 1]$ 上的图象为如图所示的线段 AB, 则在区间 $[1, 2]$ 上 $f(x) =$ _____.



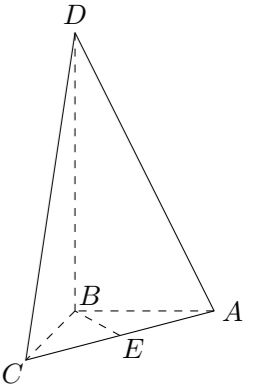
二、选择题

- 复数 $z = -3 \left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right)$ (i 是虚数单位) 的三角形形式是 ()
(A) $3 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right]$ (B) $3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$
(C) $3 \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right)$ (D) $3 \left(\cos \frac{6\pi}{5} - i \sin \frac{6\pi}{5} \right)$
- 设有不同的直线 a, b 和不同的平面 α, β, γ , 给出下列三个命题:
① 若 $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$, 则 $a \parallel b$; ② 若 $a \parallel \alpha, a \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$; ③ 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$. 其中正确的个数是 ()
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 若集合 $S = \{y \mid y = 3^x, x \in \mathbf{R}\}$, $T = \{y \mid y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $S \cap T$ 是 ()
(A) S (B) T (C) \emptyset (D) 有限集
- 下列命题中正确的命题是 ()
(A) 若点 $P(a, 2a)$ ($a \neq 0$) 为角 α 终边上一点, 则 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
(B) 同时满足 $\sin a = \frac{1}{2}, \cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的角 a 有且只有一个
(C) 当 $|a| < 1$ 时, $\tan(\arcsin a)$ 的值恒正
(D) 三角方程 $\tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$ 的解集为 $\{x \mid x = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

三、解答题

- 已知椭圆 C 的焦点分别为 $F_1(-2\sqrt{2}, 0)$ 和 $F_2(2\sqrt{2}, 0)$, 长轴长为 6, 设直线 $y = x + 2$ 交椭圆 C 于 A, B 两点, 求线段 AB 的中点坐标.

- 如图所示四面体 $ABCD$ 中, AB, BC, BD 两两互相垂直, 且 $AB = BC = 2$, E 是 AC 中点, 异面直线 AD 与 BE 所成的角的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.



- 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x}, x \in [1, +\infty)$.
(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;
(2) 若对任意 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) > 0$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

- 在二项式 $(x-1)^{11}$ 的展开式中, 系数最小的项的系数为_____. (结果用数值表示)
- 有红、黄、蓝三种颜色的旗帜各 3 面, 在每种颜色的 3 面旗帜上分别标上号码 1、2 和 3, 现任取出 3 面, 它们的颜色与号码均不相同的概率是_____.
- 在极坐标系中, 若过点 $(3, 0)$ 且与极轴垂直的直线交曲线 $\rho = 4 \cos \theta$ 于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{10} = 0$, 则有等式 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{19-n}$ ($n < 19, n \in \mathbf{N}^*$) 成立, 类比上述性质, 相应地在等比数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_9 = 1$, 则有等式_____成立.

20. 根据指令 (r, θ) ($r \geq 0, -180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$), 机器人在平面上能完成下列动作: 先原地旋转角度 θ (θ 为正时, 按逆时针方向旋转 θ , θ 为负时, 按顺时针方向旋转 $-\theta$), 再朝其面对的方向沿直线行走距离 r .
- (1) 现机器人在直角坐标系的坐标原点, 且面对 x 轴正方向, 试给机器人下一个指令, 使其移动到点 $(4, 4)$;
- (2) 机器人在完成该指令后, 发现在点 $(17, 0)$ 处有一小球正向坐标原点作匀速直线滚动, 已知小球滚动的速度为机器人直线行走速度的 2 倍, 若忽略机器人原地旋转所需的时间, 问机器人最快可在何处截住小球? 并给出机器人截住小球所需的指令. (结果精确到小数点后两位)



21. 在 xOy 平面上有一点列 $P_1(a_1, b_1), P_2(a_2, b_2), \dots, P_n(a_n, b_n), \dots$, 对每个自然数 n , 点 P_n 位于函数 $y = 2000 \cdot \left(\frac{a}{10}\right)^2$ ($0 < a < 10$) 的图象上, 且点 P_n , 点 $(n, 0)$ 与点 $(n+1, 0)$ 构成一个以 P_n 为顶点的等腰三角形.
- (1) 求点 P_n 的纵坐标 b_n 的表达式;
- (2) 若对每个自然数 n , 以 b_n, b_{n+1}, b_{n+2} 为边长能构成一个三角形, 求 a 取值范围;
- (3) 设 $B_n = b_1 b_2 \cdots b_n$ ($n \in \mathbf{N}$), 若 a 取 (2) 中确定的范围内的最小整数, 求数列 $\{B_n\}$ 的最大项的项数.

22. 已知复数 $z_0 = 1 - mi$ ($m > 0$), $z = x + yi$ 和 $\omega = x' + y'i$, 其中 x, y, x', y' 均为实数, i 为虚数单位, 且对于任意复数 z , 有 $\omega = \bar{z}_0 \cdot z, |\omega| = 2|z|$.
- (1) 试求 m 的值, 并分别写出 x' 和 y' 用 x, y 表示的关系式;
- (2) 将 (x, y) 作为点 P 的坐标, (x', y') 作为点 Q 的坐标, 上述关系可以看作是坐标平面上点的一个变换: 它将平面上的点 P 变到这一平面上的点 Q , 当点 P 在直线 $y = x + 1$ 上移动时, 试求点 P 经该变换后得到的点 Q 的轨迹方程;
- (3) 是否存在这样的直线: 它上面的任一点经上述变换后得到的点仍在该直线上? 若存在, 试求出所有这些直线; 若不存在, 则说明理由.